

---

**Technická Univerzita v Liberci**  
**Fakulta mechatroniky, informatiky a mezioborových studií**

*Disertační práce*

**Na téma:**

Vývoj teorie a metod měření s časově  
neekvidistantním vzorkováním u strojů poháněných  
rotující hřídelí

The Development of the Theory and the Methods of  
the Measurement with the Uneven Sampling in Time  
for Machines Driven with a Rotating Shaft

**Disertant :** Ing. Václav Čejka  
**Studijní program :** P2612 Elektrotechnika a informatika  
**Studijní obor :** 2612 V045 Technická kybernetika

**Pracoviště :** Katedra měření  
Fakulta mechatroniky, informatiky  
a mezioborových studií  
Technická univerzita v Liberci  
Hálkova 6, 46117 Liberec 1

**Školitel :** Doc. Ing. Miroslav Svoboda

**Rozsah disertační práce**

**Počet stran :** 100  
**Počet obrázků :** 17  
**Počet tabulek :** 7

**Liberec 2009**

# Anotace

## ■ Vývoj teorie a metod měření s časově neekvidistantním vzorkováním u strojů poháněných rotující hřídelí

Ing. Václav Čejka

Ačkoli strojní inženýrství patří mezi detailně probádané oblasti vědy, správná konstrukce mnoha skutečných strojů vyžaduje ověření pomocí měření svých (nejen) mechanických vlastností. Důležitost měření obzvláště narůstá s vyšší požadovanou přesností vyvíjených strojů, např. v textilním, polygrafickém či obráběcím odvětví průmyslu. Měření v počáteční fázi vývojového procesu napomáhá ověření základních ideí, později poskytuje okrajové podmínky pro CAM/FEM modely a konečně pomáhá ve vyhodnocení skutečného dopadu konkrétní modifikace stroje.

Centrální roli v měření mechanických vlastností hrají veličiny popisující pohyb hlavních částí analyzovaného stroje, jako je úhel pootočení, úhlová rychlost a úhlové zrychlení různých hřídelí. Ostatní analyzované veličiny, jako síly, zrychlení či vibrace je často vhodné vyhodnocovat v souvislosti s aktuální úhlovou polohou či úhlovou rychlostí určité referenční, obvykle hnací hřídele.

Pro tyto účely byl ve VÚTS, a.s. vyvinut přístroj DMU. Tento přístroj umožňuje jednoduše a přesně měřit pomocí inkrementálních rotačních snímačů úhel, úhlovou rychlost a úhlové zrychlení až na čtyřech hřídelích současně. Měření je možné definovat pomocí řady parametrů. Detailní analýza vlivů jednotlivých parametrů včetně návrhu na optimální nastavení pro konkrétní měření je součástí této práce.

Navíc přístroj DMU umožňuje synchronizaci s měřicími analyzátory některých výrobců a následně měření v závislosti na úhlu pootočení určité referenční hřídele. Tento přístup přináší mnoho výhod, ale klade také některé nové otázky a problémy. Úhlově rovnoměrné vzorkování je např. z hlediska časového vzorkování nerovnoměrné, není tedy splněn jeden ze základních předpokladů zpracování diskretních dat klasickými metodami. Tento a další významné problémy budou také analyzovány v předkládané práci.

Klíčová slova: měření, frekvenční analýza, řádová analýza, úhlová rychlost, úhlová měření, nerovnoměrné vzorkování

# Annotation

## ■ The Development of the Theory and the Methods of the Measurement with the Uneven Sampling in Time for Machines Driven with a Rotating Shaft

Václav Čejka, M.Sc.

Although mechanical engineering is very examined area of science, proper construction of many real machines demands its verification via measurement of its (not only) mechanical properties. This importance especially grows with higher requested precision of the developed machine, e.g. in textile, printing or tooling industry. Measurement in early stage of development process helps in verification of basic ideas, later on it gives border conditions to CAM/FEM models and finally it helps in evaluation of true impact of some specific machine's modification.

Quantities describing movement of main parts of analyzed machine play the central role in measurement of mechanical properties. It is often advantageous to analyze other measured quantities (forces, accelerations, vibrations...) in connection with current angular position or angular velocity of some reference, typically driving shaft.

For this reason measuring device DMU was developed in VUTS, Co. This device can be easily used for precise measurement of angles, angular velocities and angular accelerations via incremental rotary encoders. Up to 4 shafts can be analyzed simultaneously. Measurement can be defined by many parameters. Comprehensive analysis of the influence of particular parameters together with the algorithm of optimal settings in part of this thesis.

Furthermore DMU device allows synchronization with measurement analyzers of some manufacturers and subsequent measurement with angular sampling base defined by angle of rotation of some reference shaft. This approach gives many advantages, however defines new questions and problems. For example, angularly even sampling is uneven in time domain, so one of the basic presumptions of classical discrete data analysis is not realized. This problem and other most important ones will be analyzed in this thesis.

Key words: measurement, frequency analysis, order analysis, angular velocity, angular measurements, uneven sampling

## Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou disertační práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 o právu autorském, zejména §60 (školní dílo).

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci má právo na uzavření licenční smlouvy o využití mé práce a prohlašuji, že **souhlasím** s přímým užitím mé disertační práce (prodej, zapůjčení, apod.).

Jsem si vědom toho, že užít svou disertační práci či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem Technické univerzity v Liberci, která má právo ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených univerzitou na vytvoření díla (až do jejich skutečné výše).

Disertační práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací, pod vedením školitele.

V Liberci dne 25.3.2009

.....  
Ing. Václav Čejka

## Poděkování

Je mi milou povinností poděkovat Doc. Ing. Miroslavu Svobodovi za podnětné rady a připomínky, které mi poskytl při vypracovávání práce. Stejně tak bych rád poděkoval celému kolektivu oddělení Měření ve VÚTS a.s., a zvláště Ing. Pavlu Šidlofovi, CSc. za potřebné technické zázemí a odbornou konzultaci všech problémů, které vznikly při řešení práce, a Ing. Petru Škopovi, CSc. za umožnění studia a vypracování práce při běžných pracovních povinnostech.

Poděkování však patří i mé rodině za veškerou morální podporu.

Autor

# Obsah

<i>Obsah</i> .....	6
<i>Seznam použitých veličin</i> .....	8
<i>Seznam použitých symbolů</i> .....	10
<b>1. Úvod</b> .....	11
1.1 Cíle disertační práce .....	13
1.2 Členění práce .....	13
<b>2. Současný stav</b> .....	15
2.1 Klasické přístupy k úhlovým měřením .....	15
<b>3. Popis navržené metody</b> .....	17
3.1 Měření úhlu .....	18
3.2 Měření úhlové rychlosti .....	18
3.3 Měření úhlového zrychlení .....	21
3.4 Úhlová vzorkovací základna .....	22
<b>4. Analýza informačního obsahu dat získaných z použité metody</b> .....	24
4.1 Úhel .....	24
4.1.1 Statické rozlišení (kvantovací chyba) .....	24
4.1.2 Optimální nastavení .....	25
4.1.3 Nejistota měření .....	26
4.2 Úhlová rychlost .....	27
4.2.1 Statické rozlišení (kvantovací chyba) .....	27
4.2.2 Optimální nastavení .....	28
4.2.3 Nejistota měření .....	29
4.2.4 Fázové zpoždění naměřených hodnot úhlové rychlosti .....	29
4.2.5 Popis dynamiky měření .....	30
4.2.6 Měření s vysokou dynamikou .....	31
4.2.7 Výpočet diferenčního úhlu integrací úhlové rychlosti .....	35
4.3 Úhlové zrychlení .....	36
4.3.1 Statické rozlišení (kvantovací chyba) .....	36
4.3.2 Optimální nastavení .....	37
4.3.3 Fázové zpoždění naměřených hodnot úhlového zrychlení .....	38
4.4 Použitý algoritmus optimalizace nastavení .....	39
4.4.1 Algoritmus optimálního nastavení měření úhlu .....	40
4.4.2 Algoritmus optimálního nastavení měření úhlové rychlosti .....	42
4.4.3 Algoritmus optimálního nastavení měření úhlového zrychlení .....	43
<b>5. Analýza chyb měření s enkodéry</b> .....	44
5.1 Chyba vlivem nepřesné délky pulsů enkodérů .....	44
5.2 Chyba vzniklá nepřesným měření času použitého pro výpočet rychlosti a zrychlení .....	46
5.3 Chyba vlivem reálných vlastností propojovacích kabelů .....	46

5.4 Torzní kmity snímačů .....	47
5.5 Nesouosé umístění snímačů vůči měřené hřídeli .....	51
5.6 Nedokonalé uložení měřené hřídele .....	51
5.7 Chyba vzorkování v závislosti na úhlu pootočení vlivem torzních kmitů enkodéru .....	52
5.8 Celková nejistota měření .....	58
6. <i>Fourierova transformace pro nerovnoměrně vzorkované signály</i> .....	60
6.1 Obecná Fourierova transformace .....	60
6.2 Periodické funkce .....	61
6.3 Fourierova transformace na omezeném intervalu .....	63
6.4 Fourierova transformace diskrétních posloupností .....	65
6.5 Vzorkovací teorém pro rovnoměrně vzorkovaná data .....	67
6.6 Vliv nerovnoměrného vzorkování .....	69
7. <i>Numerická transformace frekvenčních a řádových spekter a časových a úhlových dat</i> .....	72
7.1 Příklad .....	76
8. <i>Analytická souvislost mezi frekvenčními a řádovými spektry</i> .....	80
8.1 Elementární případ .....	82
8.2 Rozšíření o fázový posuv .....	87
8.3 Vztahy vyšších řádů .....	89
9. <i>Závěr</i> .....	94
<i>Rejstřík</i> .....	96
<i>Použitá literatura</i> .....	98
<i>Přehled publikací</i> .....	100

## Seznam použitých veličin

$1_X$	indikátorová funkce na množině $X$ , $1_X(t) = 1$ pro $t \in X$ , $1_X(t) = 0$ pro $t \notin X$ ,
$\delta$	Diracova $\delta$ -funkce
$\delta_\varepsilon$	kvantovací chyba měření úhlového zrychlení pomocí přístroje DMU
$\delta_\varphi$	kvantovací chyba měření úhlu pomocí přístroje DMU
$\delta_\omega$	kvantovací chyba měření úhlové rychlosti pomocí přístroje DMU
$\delta_{p\omega}$	relativní chyba úhlové rychlosti vlivem nepřesnosti pulsů enkodéru
$e$	Eulerova konstanta, $e \doteq 2.71828$
$\varepsilon$	úhlové zrychlení
$\varphi$	úhel pootočení
$\Delta\varphi$	úhlový vzorkovací interval; základní úhlový interval pro měření úhlové rychlosti a úhlového zrychlení přístrojem DMU
$\phi$	obvykle úhel pootočení vyjádřený v závislosti na čase
${}_2F_1(a, b; c; z)$	Gaussova-Barnesova hypergeometrická funkce řádu 2;1
$\mathcal{F}(y)$	dopředná Fourierova transformace funkce $y$
$\mathcal{F}^{-1}(Y)$	inverzní Fourierova transformace funkce $Y$
$\Gamma(y)$	gamma funkce $y$
$\mathcal{H}_N^T$	Hilbertův prostor funkcí periodických s periodou $T$ a frekvenčně omezených s nejvyšší frekvenční složkou $N/T$
$i$	imaginární jednotka, $i = \sqrt{-1}$
$i_\Delta$	počet pulsů enkodéru odpovídající jednomu pulsu úhlové vzorkovací základny
$i_\varepsilon$	počet pulsů enkodéru, přes které se určuje úhlové zrychlení
$i_\omega$	počet pulsů enkodéru, přes které se určuje úhlová rychlost
$\lambda$	vlnová délka
$\mathcal{L}^2(X)$	Hilbertův prostor funkcí integrovatelných v kvadrátu na množině $X$
$n_i$	stupeň interpolace enkodéru
$\nu$	frekvence
$\nu_B$	nejvyšší nenulová frekvenční složka
$\nu_{Nq}$	Nyquistova frekvence
$\nu_{vz}$	vzorkovací frekvence
$\nu_y$	základní frekvence periodické funkce $y$
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel



$\mathbb{N}_0$	množina přirozených čísel včetně nuly
Ord	řád
$o$	řádová frekvence
$o_B$	nejvyšší nenulová řádová složka
$o_{Nq}$	Nyquistova řádová frekvence
$o_{vz}$	řádová vzorkovací frekvence
$o_y$	základní řádová frekvence periodické funkce $y$
$p$	počet pulsů (period) enkodéru za jednu otáčku
$R$	počet otáček základní periody v úhlové nezávislé proměnné, $R = 1 / o_y$
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
Sinc	funkce $\text{Sinc}(x) = \text{Sin}(x) / x$
$t$	obvykle čas, nezávislá proměnná
$\Delta t$	časový vzorkovací interval
$\Delta t(\varphi)$	doba potřebná k rotaci o základní úhlový interval $\Delta \varphi$ při úhlu pootočení $\varphi$
$\tau$	obvykle čas vyjádřený v závislosti na úhlu pootočení
$T$	obvykle perioda v časové nezávislé proměnné
$x$	obvykle pozice, nezávislá proměnná
$w$	obvykle okénková funkce
$W$	obvykle spektrální okno
$\omega$	úhlová rychlost
$z_1 / z_2$	racionální převodový poměr
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel

## Seznam použitých symbolů

$y$	malými písmeny je značena funkce v časové/úhlové reprezentaci
$Y$	velkými písmeny je značena spektrální reprezentace funkce $y$
$Y^\varphi$	řádkové spektrum funkce $y$ (jako funkce úhlu pootočení $\varphi$ )
$Y^t$	frekvenční spektrum funkce $y$ (jako funkce času $t$ )
$y^\Sigma$	funkce odvozená od funkce $y$ diskrétním vzorkováním
$\bar{x}$	číslo komplexně sdružené k číslu $x$
$y * w$	konvoluce dvou funkcí
$(a)_k$	Pochhammerův symbol
$\lfloor x \rfloor$	nejvyšší celé číslo menší nebo rovno $x$
$\lceil x \rceil$	nejnižší celé číslo větší nebo rovno $x$
$\hat{n}$	množina přirozených čísel $1, 2, \dots, n$
$X^T$	matice (či vektor) transponovaný z matice $X$
$X^*$	matice transponovaná a komplexně sdružená k matici $X$
$X.Y$	maticový součin dvou matic

# 1. Úvod

Práce se zabývá novou metodou měření a vyhodnocení mechanismů. Tato metoda je vhodná především pro mechanismy poháněné rotující hřídelí, kterou budeme v dalším textu nazývat *referenční hřídel*. Takových mechanismů je většina a obvykle vykonávají přibližně periodický pohyb. Během matematického návrhu a modelování těchto mechanismů jsou jednotlivé veličiny většinou vyjádřeny jako funkce úhlu pootočení referenční hřídele. Úhlová rychlost referenční hřídele ovšem obvykle není konstantní, ani nemá přibližně konstantní střední hodnotu, protože je zpětně ovlivněna poháněnými mechanismy. Skutečnou úhlovou rychlost referenční hřídele je pak obtížné přesně vyjádřit, a stejně tak i skutečný pohyb celého stroje. Navíc tato vnesená nerovnoměrnost pohybu často způsobuje další nežádoucí důsledky, jako je vzrůst vibrací a hluku stroje, omezení maximální produktivity stroje či snížení kvality produkovaných výrobků (např. textilie u textilních strojů, soutisk různých barev u polygrafických strojů atd.) Další nežádoucí důsledky se mohou objevit při rozběhu či doběhu stroje.

Klasické metody vyhodnocení funkce mechanismu pomocí měření v závislosti na čase (hodnoty jsou ze snímačů zaznamenávány v rovnoměrně rozložených časových okamžicích  $t_k = t_0 + k \Delta t$ , tzv. *časová vzorkovací základna*) přinášejí řadu komplikací. Měření jsou obtížně vzájemně porovnatelná navzájem a zvláště s matematickým modelem, či jsou obtížně vyjadřitelná v závislosti na úhlu pootočení, výpočty středního průběhu a směrodatných odchylek od středního průběhu z několika cyklů stroje jsou nepřesné, atd.

Je ovšem možný i jiný přístup. Data mohou být snímána v závislosti na úhlu pootočení hnací hřídele, v časových okamžicích  $t(\varphi_k)$ , kde  $\varphi_k = \varphi_0 + k \Delta \varphi$  (v dalším textu těmto okamžikům budeme říkat *úhlová (vzorkovací) základna*). Pro tato měření byl ve VÚTS a.s. vyvinut přístroj DMU. Přístroj využívá inkrementálních rotačních snímačů, též nazývaných enkodéry. Tyto snímače jsou zdrojem úhlově velmi přesně rozložených impulsů. Přístroj DMU z těchto impulsů jejich sčítáním a určením jejich period určuje úhel, úhlovou rychlost a úhlové zrychlení a produkuje úhlovou základnu pro měření v závislosti na úhlu pootočení referenční hřídele. Přístroj (nyní je již vyvinuta 5. generace) umožňuje vstup až 4 enkodérů a měření úhlu a úhlové rychlosti také diferenčně mezi dvěma vstupy.

Tento inovativní přístup ovšem odkrývá zcela novou oblast v teorii sběru a zpracování dat. Cílem této práce je zadefinovat základní pojmy této teorie, nastínit její vztah ke klasické teorii sběru a zpracování dat, definovat vlastnosti této metody, popsat informační obsah naměřených veličin, analyzovat možné chyby měření a předložit výpočetní algoritmy pro zpracování úhlově měřených dat.

Vzhledem k inženýrské aplikaci této práce budou v následujícím textu používány fyzikální jednotky obvyklé v inženýrské praxi. Úhlová rychlost bude udávána v otáčkách za minutu [RPM], úhel pootočení ve stupních.

## ■ 1.1 Cíle disertační práce

Předložená práce si klade za cíl doplnit bílá místa v teorii měření úhlů, úhlových rychlostí a úhlových zrychlení a v teorii měření v závislosti na úhlu pootočení referenční hřídele. V obou případech se bude vycházet z použití inkrementálních rotačních snímačů. Zvláště měření úhlů a úhlových rychlostí jsou relativně běžná, ale neporozumnění některým základním principům může vést k chybně naměřeným datům, omezení informačního obsahu dat a k chybným závěrům z dat vyvozených.

K základním cílům patří precizní definování popisované metody měření a analýza jednotlivých parametrů, které jsou pro měření nastavitelné. Budou také definovány, popsány a vyhodnoceny možné chyby měření včetně návrhů na jejich odstranění.

Bude analyzován vztah mezi časově a úhlově rovnoměrně vzorkovanými daty. Tento vztah má svá specifika zvláště při spektrální analýze Fourierovou transformací. Proto bude hledán jak teoretický vztah mezi spektry vypočtenými z časově a úhlově vzorkovaných dat, tak bude hledána numerická transformace mezi časovou a úhlovou doménou.

## ■ 1.2 Členění práce

Disertační práce je členěna do osmi základních kapitol, které se věnují problematice spojené s metodou měření úhlů, úhlových rychlostí a úhlových zrychlení pomocí inkrementálních rotačních snímačů, a také sběru dat v závislosti na úhlu pootočení rotující hřídele a jeho vztahu ke klasickému měření v závislosti na čase.

Po krátkém úvodu s představením cílů práce a tomto stručném členění následuje kapitola 2 zabývající se rešerší a současnými přístupy k měření na strojích s rotující hřídelí. Stručně jsou popsány jejich klady a zápory.

Ve třetí kapitole je detailně popsána navrhovaná metoda měření s pomocí inkrementálních rotačních snímačů nazývaných též enkodéry. Jsou definovány základní pojmy a uvedeny přesné vztahy použité pro měření úhlu, úhlové rychlosti a úhlového zrychlení pomocí přístroje DMU ve verzi 4 a vyšší, na jejichž konstrukci se autor této práce podílel.

Z praktického hlediska velmi významná čtvrtá kapitola detailně analyzuje informační obsah jednotlivých měřených veličin a vliv jednotlivých parametrů

měření na naměřená data.

V páté kapitole jsou detailně analyzovány možné zdroje nejistoty měření a uživatelských chyb včetně ohodnocení jejich reálného významu. Jsou také navrženy postupy pro redukci těchto chyb.

Šestá kapitola tvoří teoretický předěl k druhé části práce zabývající se spektrální analýzou. V této kapitole je definována Fourierova transformace a jsou odvozeny její základní vlastnosti s ohledem na diskrétní sběr dat v omezeném časovém intervalu. Teoretické zázemí je vybudováno tak, aby byl názorně představen rozdíl mezi ekvidistantním a neekvidistantním vzorkováním. Je představen také obecný vztah popisující ovlivnění spektrální informace neekvidistantním vzorkováním.

Sedmá kapitola navrhuje obecnou a pro reálnou praxi velmi užitečnou numerickou transformaci diskrétních dat mezi časově a úhlově ekvidistantními doménami. Tato transformace vlastně provádí praktické odstranění vlivu neekvidistantního vzorkování na spektrální informaci.

Předposlední osmá kapitola se pokouší alespoň na základních případech analyticky popsat souvislosti mezi spektry v časové a úhlové doméně. Exaktní vztahy je možné odvodit jen pro elementární případy, ze získaných výsledků i reálných numerických testů je však patrné, že odvozené souvislosti mají širší platnost.

V závěru práce jsou zhodnoceny dosažené výsledky a poznatky.

## 2. Současný stav

### ■ 2.1 Klasické přístupy k úhlovým měřením

Vzhledem k významu analýzy mechanismů a strojů poháněných rotujícími hřídeli bylo vyvinuto několik metod využívajících běžně používané časově rovnoměrné vzorkování. Obvykle jsou tyto metody shrnovány pojmem *řádomá analýza* (Order-Analysis). Řádem se rozumí aktuální perioda jedné otáčky referenční hřídele, neboli aktuální perioda první harmonické složky. Základní přehled těchto přístupů je uveden např. v lit. [3]. Prostý sběr dat s fixní vzorkovací frekvencí a přímé vyhodnocení klasickou frekvenční analýzou s jednotkami nezávislé proměnné v [Hz] přináší obtíže již se sledováním zvolené harmonické složky, neboť vlivem kolísání či trendu střední úhlové rychlosti se také pozice této harmonické složky ve spektru mění. Je také velmi obtížné určovat střední průběh či jiné funkční statistiky z několika period stroje, neboť každá perioda má, byť jen o málo, odlišný počet vzorků a hodnoty sledované funkce není možné prostým způsobem kombinovat z několika period.

Tyto obtíže se s úspěchem daří redukovat metodou *synchronní vzorkovací frekvence* (též zvané *souběhová filtrace*, angl. Order-tracking analysis), která využívá tzv. *tacho-signálu*. Tacho-signál je pomocný údaj nesoucí pulsní složku ve zvolených úhlových pozicích, obvykle jednou za otáčku. Naměřená data jsou v post-processingu či i v reálném čase přefiltrována a interpolací převzorkována tak, aby v intervalu mezi tacho-pulsy byl vždy stejný počet vzorků. V takto získaných datech pak sledovaná harmonická složka zůstává stále na stejné pozici ve spektru. Nezávislou proměnnou spektra je již zmíněný řád a spektru se říká *řádomé spektrum*. Název řádomé spektrum je však při použití jediného tacho-signálu jen přibližný, neboť nezachycuje plně průběh úhlové rychlosti mezi tacho-pulsy, ale pracuje pouze se střední hodnotou úhlové rychlosti mezi tacho-pulsy. Je-li např. sledovanou funkcí mechanismu v závislosti na úhlu pootočení funkce  $\sin(\varphi)$  a úhlová rychlost má rostoucí tendenci s nezanedbatelným sklonem, sledovaná funkce může být i výrazně zkreslená a takto odhadnuté řádomé spektrum obsahuje řadu postraních harmonických složek. Podobně při kolísání úhlové rychlosti v rámci jedné otáčky dochází ke zkreslení sledované funkce. Dokonce rozdílné průběhy úhlové rychlosti v rámci jedné otáčky mohou mít stejnou střední hodnotu, výsledkem souběhové filtrace však bude zcela odlišné

zkreslený průběh. Určení funkčních statistik z více cyklů je sice díky interpolaci na shodný počet vzorků za cyklus možné, ovšem opět díky nerozpoznatelnému kolísání úhlové rychlosti v rámci jednoho cyklu stroje může být velmi zavádějící a minimálně má z toho důvodu značně sníženou rozlišovací schopnost. Podrobnější analýzu souběhové filtrace podává např. lit. [9] či [19].

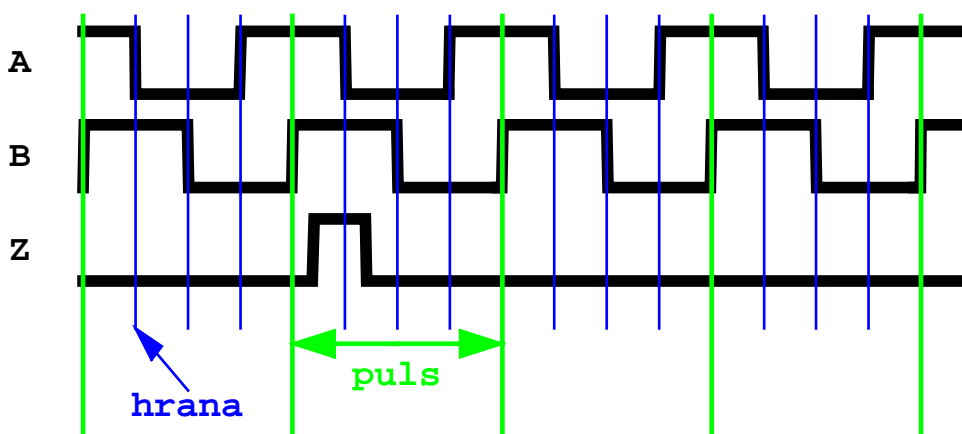
Vold předložil další způsob nazývaný Vold-Kalmanova filtrace (viz např. lit. [10]). Opět se vychází z dat sbíraných s časovou základnou spolu s tachosignálem. Na rozdíl od předchozího je však v tomto případě dbáno na spojitost úhlové rychlosti splinovou interpolací v bodech jednotlivých tachopulsů. Také cíl Vold-Kalmanovy filtrace je odlišný - zatímco souběhová filtrace směřovala k řádovému spektru a frekvenční analýze, Vold-Kalmanova filtrace poskytuje časové průběhy vybraných harmonických složek sledovaného signálu. Vold-Kalmanova filtrace je velmi vhodná pro průběhy s malým počtem frekvenčních složek a pro úhlovou rychlost s trendem. Vzhledem k interpolaci úhlové rychlosti pouze v nízkém počtu tachopulsů (obvykle jeden za otáčku) ovšem opět nedokáže postihnout kolísání úhlové rychlosti v rámci jednoho cyklu stroje. Výsledná časová data jsou však opět vzorkována s fixní vzorkovací frekvencí a nejsou tedy vhodná pro výpočet funkčních statistik z několika cyklů. Navíc je Vold-Kalmanova analýza značně výpočetně náročná.

Alternativní přístup byl předložen v lit. [20]. Úhlová rychlost je určena z měření s konstantní vzorkovací frekvencí pomocí Hilbertovy transformace. Přesněji řečeno, úhel pootočení je vypočten fázovou demodulací impulsního signálu z enkodéru připojeného k referenční hřídeli. Úhlová rychlost je pak určena numerickou derivací takto určeného úhlu. Tato metoda dává poměrně přesný průběh úhlu a úhlové rychlosti (a v dalších derivacích i úhlového zrychlení) i při kolísání úhlové rychlosti v rámci jedné periody. Jednotlivé cykly stroje však opět nemají shodný počet vzorků a odhad řádových spekter a výpočet statistik z více cyklů je nutno dělat z interpolovaných dat transformovaných pomocí úhlové rychlosti, čímž vznikají další nepřesnosti. Následující práce představí i jednu takovou možnou transformaci. Podrobná analýza metody využívající Hilbertovu transformaci je provedena např. v lit. [21].



### 3. Popis navržené metody

Navrhovaná metoda je založena na použití inkrementálních rotačních smínačů, zvaných též enkodéry. Enkodéry vytvářejí obdélníkové či sinusové pulsy se zvoleným úhlovým rozlišením. Řada výrobců nabízí enkodéry s vysokou relativní přesností. Úhlové intervaly mezi jednotlivými pulsy se navzájem neliší o více než 0.1%. Taková přesnost umožňuje s vysokou přesností měření okamžité úhlové rychlosti jako převrácené hodnoty délky časového intervalu mezi impulsy enkodéru. Úhlová vzorkovací základna daná pulsy enkodéru je také velmi stabilní a přesná.



Obr. 1: Pulsy generované enkodérem s obdélníkovým výstupem

Obvykle enkodéry generují 3 signály (viz obr. 1). Nulový signál Z slouží jako referenční bod a je generován jednou za otáčku (ne nutně synchronně se signály A nebo B). Signály A a B určují vlastní úhlové rozlišení. Jsou shodné a fázově posunuté o čtvrtinu periody, aby byla jednoznačně určena orientace rotačního pohybu. Enkodéry jsou charakterizovány počtem period  $p$ , nebo též pulsů signálů A a B na jednu otáčku snímače. Na trhu jsou enkodéry s počtem pulsů od 60 do 90 000 na otáčku snímače. Pro aplikaci v dalším textu je nutné ještě podotknout, že úhlové intervaly odpovídající celým násobkům periody signálů A a B jsou vysoce přesné, kratší úhlové intervaly (např. mezi sousedními vzestupnými hranami signálů A a B) mají mnohem větší chybu danou jak horší přesností ve fázovém posuvu mezi oběma signály, tak různými vlastnostmi náběžných a sestupných hran (např. pro náběžnou hranu je čítač triggerován později než pro sestupnou).

Signály enkodérů mohou mít také harmonický průběh. Pak je citlivost na

referenční úroveň triggeru čítače ještě vyšší. Výhodou sinových enkodérů je však možnost zvýšení počtu triggerovacích úrovní a zjemnění úhlového rozlišení enkodéru (tzv. interpolace). Toho lze využít zejména při měření úhlu pomaloběžných hřídelí např. u obráběcích strojů.

Jak již bylo uvedeno, za účelem realizace a zjednodušení měření pomocí enkodérů byl ve VÚTS, a.s. vyvinut přístroj DMU (viz lit. [17]). Zařízení DMU je dnes vyvinuto již v páté generaci. Je možné k němu připojit až čtyři enkodéry. DMU využívá čítač s frekvencí 100 MHz, tzn. rozlišení 10ns, pro měření času za účelem výpočtu rychlosti a zrychlení. Vlastní výpočty jsou prováděny v FPGA (programovatelné hradlové pole) s vysokým bitovým rozlišením (až 96 bitů). Výsledky mohou být zaznamenávány buď analogově či v digitální podobě. Pro každou vypočítávanou veličinu (úhel, rychlost, zrychlení) je také možné nastavit rozsah sledovaných hodnot, který nemusí obsahovat nulový bod. Tím je možné významně zvýšit rozlišení měření při zachování stejného hardware pro sběr dat (obvykle nejvýše 16-bitový). Např. při měření rychlosti v rozsahu 2800 – 3200 RPM bude 16-bitový měřicí rozsah rozložen pouze přes těchto zvolených 400 RPM, tedy rozlišení může být až přibližně 0.006 RPM (v závislosti na použitém enkodéru).

### ■ 3.1 Měření úhlu

Úhel je měřen prostým způsobem načítáním počtu hran obou signálů A a B, tzn. má rozlišení až čtyřikrát vyšší než je počet pulsů enkodéru. Dále může být měřen rozdílový úhel mezi dvěma připojenými snímači, a to i pokud mají rozdílný počet pulsů na otáčku, či je mezi nimi nastaven racionální převodový poměr  $z_1 / z_2$ . Je implementován algoritmus, který nevyužívá dělení, a proto nedochází k zaokrouhlovacím chybám, které by při dlouhodobém měření způsobovaly drift sledované hodnoty či dokonce přetečení čítačů. Díky vysokému bitovému rozlišení výpočtů v FPGA je možné dosáhnout vysoce přesných měření např. torzních vibrací, plížení plochých či klínových řemenů, vibrace převodů s ozubenými řemeny či vliv poškození ozubených kol.

### ■ 3.2 Měření úhlové rychlosti

Vzhledem k vysoké úhlové přesnosti signálů enkodéru je perioda  $\Delta t$  mezi hranami signálu enkodéru měřena s rozlišením 10 ns. Úhlová rychlost je vypočtena jako převrácená hodnota z periody  $\Delta t$

$$\omega(\varphi) \doteq \frac{\Delta \varphi}{\Delta t(\varphi)} = 60 \frac{i_\omega}{p} \frac{1}{t(\varphi) - t(\varphi - \Delta \varphi)} [\text{RPM}], \quad (1)$$

kde  $\Delta \varphi$  značí úhlový interval, přes který je měřen čas. Tento úhlový interval je určen z počtu pulsů snímače za otáčku  $p$  a z údaje  $i_\omega$ , který určuje, přes kolik pulsů snímače se má měřit čas  $\Delta t$ , tedy čas potřebný k otočení hřídelky snímače z úhlové pozice  $\varphi - \Delta \varphi$  do pozice  $\varphi$ . Parametr  $i_\omega$  je obecně násobkem 1/4, obvykle je celočíselný či 1/2 nebo 1/4. Vypočtená úhlová rychlost  $\omega$  ve skutečnosti není okamžitá úhlová rychlost, ale střední hodnota úhlové rychlosti za časový interval  $\Delta t$ . Čím je  $\Delta \varphi$  vyšší, tím méně obsahuje výstup měřené úhlové rychlosti rušivých vlivů, ale je potřeba delší časový interval k určení úhlové rychlosti a obsahuje také méně hledané informace. Pro nízké úhlové rychlosti a příliš dlouhé úhlové intervaly  $\Delta \varphi$  má proto záznam úhlové rychlosti schodovitý charakter. Správné nastavení parametru  $i_\omega$  je tedy klíčové pro dobré měření. Nastavování může být řešeno několika způsoby:

- podle předem známé střední úhlové rychlosti je optimálně zvolen úhlový interval  $\Delta \varphi$ . Tento postup je vhodný pro měření ustáleného chodu stroje při známé provozní rychlosti.

- velikost úhlového intervalu  $\Delta \varphi$  může být přístrojem DMU automaticky upravována během měření. Uživatelem může být zvolena dynamika růstu a hystereze úhlové rychlosti. Tento mód je však komplikovanější pro nastavení a limituje některá další nastavení přístroje. Je obzvláště vhodný pro měření rozběhů a doběhů stroje či kývavých pohybů.

- na základě testovacího běhu stroje může být automaticky přístrojem zvolen optimální pracovní mód z předchozích dvou možností a jeho parametry. Nalezení algoritmu pro takové nastavení bude jedním z výstupů této práce. V některých případech ovšem nemusí být opakovaný běh stroje možný či finančně únosný.

Vzhledem k obvyklým chybám ve fázovém posuvu mezi signály A a B u enkodérů (jak bylo popsáno výše) není vhodné měření úhlové rychlosti pro neceločíselné  $i_\omega$  vyjma případů velmi nízkých úhlových rychlostí, ve kterých je tato chyba vztažená na časovou délku proměřovaného úhlového intervalu nižší.

Podobně jako úhel i úhlová rychlost může být měřena také diferenčně mezi dvěma vstupními enkodéry. Enkodéry mohou mít rozdílný počet pulsů na otáčku a může být zadán racionální převodový poměr mezi nimi.

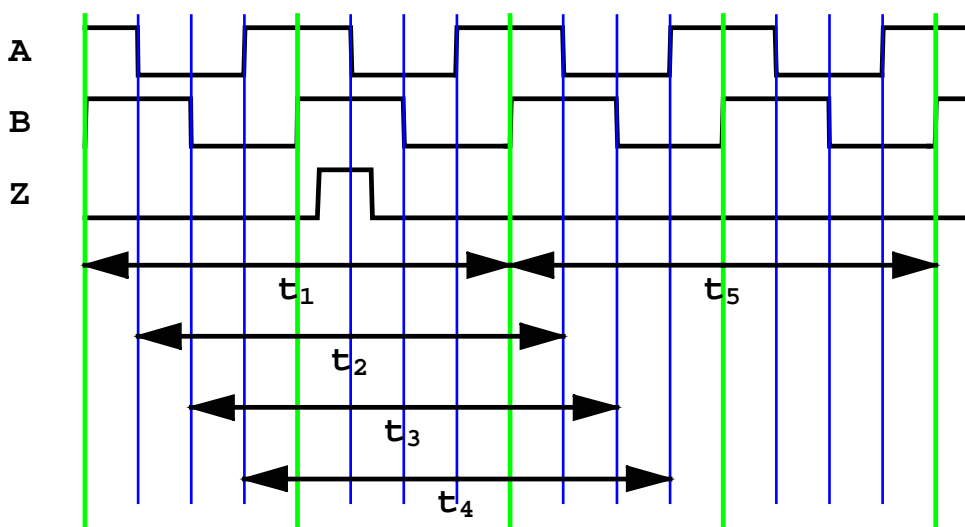
Pro zkvalitnění výstupu úhlové rychlosti má přístroj DMU od verze 4 ještě některé další vlastnosti. Předně čas  $\Delta t$  může být paralelně měřen  $k + 1$  čítači

(v současné době 1, 2 nebo 4) s daným fázovým posuvem  $\phi$ . Úhlová rychlost je pak vypočtena ze střední hodnoty z časů naměřených všemi čítači, tzn.

$$\omega(\varphi) \doteq \Delta \varphi \frac{k+1}{\Delta t(\varphi) + \Delta t(\varphi - \phi) + \dots + \Delta t(\varphi - k\phi)} =$$

$$60 \frac{i_\omega}{p} \frac{k+1}{\sum_{j=0}^k t(\varphi - j\phi) - t(\varphi - \Delta\varphi - j\phi)} [\text{RPM}]. \quad (2)$$

Obvykle se předpokládá, že úhlový interval  $\Delta\varphi$  je celočíselným násobkem periody signálů A a B. Smysluplné nastavení je  $(k+1)\phi \leq \Delta\varphi$ , v opačném případě již do průměru v uvedeném vztahu nepřichází žádné nové informace (časové okamžiky se odečtou). Obvykle je úhel  $\phi$  zvolen jako čtvrtina periody signálů A a B, tedy jako fázový posuv mezi těmito signály. Čítače pak měří paralelně čas mezi souhlasnými hranami signálů A a B, viz obr. 2. Takovéto průměrování slouží především k redukci chyb enkodérů. Tento výpočet ovšem prodlouží čas potřebný k výpočtu jedné hodnoty úhlové rychlosti.



Obr. 2: Příklad měření rychlosti paralelně několika čítači, zde  $i_\omega = 2$ ,  $k = 3$ ,  $\phi = \Delta\varphi / 8$ . Úhlová rychlost je vypočtena jako

$$\omega(\varphi) = 2 \frac{360^\circ}{p} \frac{4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}.$$

Úhlová rychlost může být využita také k výpočtu úhlu pootočení integrací. Tento postup je vhodný především pro měření malých diferečních úhlů kolísajících kolem nulové hodnoty, např. torzních kmitů. Výhodou je podstatně vyšší rozlišení než při přímém měření úhlu pootočení. Podrobná analýza je provedena v následujících kapitolách.

### ■ 3.3 Měření úhlového zrychlení

Další veličinou určenou zařízením DMU je "okamžitá" hodnota úhlového zrychlení. Ve skutečnosti se jedná přirozeně pouze o střední hodnotu úhlového zrychlení za čas nutný k rotaci hřídele enkodéru o zvolený počet pulsů, není to skutečná okamžitá hodnota. Zrychlení je poměrně citlivé na šum, je proto vhodné měřit čas přes větší počet pulsů enkodéru, proto je časové zpoždění nutné k výpočtu obvykle významnější než u úhlové rychlosti. Navíc při významných změnách úhlové rychlosti toto časové zpoždění významně kolísá, neboť pro nízké úhlové rychlosti je větší než pro vysoké úhlové rychlosti, což se jasně projeví při měření s časovou základnou. Celkově shrnuto je úhlové zrychlení měření přístrojem DMU spíše orientační pro získání rychlé základní představy o měřeném systému. Kvalitnější odhad úhlového zrychlení je možné získat derivací dobře změřené úhlové rychlosti v postprocessingu.

Úhlové zrychlení je v zařízení DMU vypočteno z časových délek dvou po sobě následujících úhlových intervalů

$$\begin{aligned}\varepsilon(\varphi) &\doteq \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega(\varphi) - \omega(\varphi - \Delta \varphi)}{t(\varphi) - t(\varphi - \Delta \varphi)} = \\ &\frac{\Delta \varphi}{\Delta t(\varphi) + \Delta t(\varphi - \Delta \varphi)} \left( \frac{1}{\Delta t(\varphi)} - \frac{1}{\Delta t(\varphi - \Delta \varphi)} \right) \left[ \frac{\text{rad}}{s^2} \right], \\ \Delta \varphi &= \frac{2 \pi i_\varepsilon}{p} [\text{rad}].\end{aligned}\quad (3)$$

Za interval  $\Delta t [s]$  je zvolen časový úsek potřebný pro výpočet obou sousedních hodnot úhlové rychlosti. Úhlový interval může být opět vyjádřen pomocí počtu period enkodéru za otáčku  $p$  a počtu period enkodéru  $i_\varepsilon$ , přes které se měří čas. Na rozdíl od výpočtu úhlové rychlosti ve vztahu (1) je vzhledem k běžným konvencím použito jiných jednotek úhlového intervalu  $\Delta \varphi$ .

Podobně jako u úhlové rychlosti lze vylepšit výpočet úhlového zrychlení měřením času  $k + 1$  čítači paralelně se zvoleným fázovým posuvem  $\phi$ , tzn.

$$\begin{aligned}\varepsilon(\varphi) &\doteq \frac{2 \pi i_\varepsilon}{p} \frac{(k+1)^2}{\sum_{j=0}^k \Delta t(\varphi - j \phi) + \Delta t(\varphi - j \phi - \Delta \varphi)} \\ &\left( \frac{1}{\sum_{j=0}^k \Delta t(\varphi - j \phi)} - \frac{1}{\sum_{j=0}^k \Delta t(\varphi - j \phi - \Delta \varphi)} \right) \left[ \frac{\text{rad}}{s^2} \right].\end{aligned}\quad (4)$$

### ■ 3.4 Úhlová vzorkovací základna

Základním přínosem přístroje DMU je měření s úhlovou vzorkovací základnou. Zařízení DMU je možné externě či interně synchronizovat se zařízením pro sběr dat od některých výrobců. Všechna data, úhlová i ostatní snímaná zařízením pro sběr dat, jsou pak snímána v okamžiku výskytu zvolených pulsů signálů A a B enkodéru, tedy ve zvolených úhlových pozicích  $t(\varphi_k)$ ,  $\varphi_k = \varphi_0 + k \Delta \varphi$ . Úhlové rozlišení  $\Delta \varphi = i_\Delta 360 / p[\text{deg}]$ , které recipročně odpovídá četnosti úhlové vzorkovací základny, může být zvoleno od 1/4 periody signálů A a B enkodéru (tedy s každou hranou signálů A a B,  $i_\Delta = 1/4$ ) až přes 1024 pulsů enkodéru ( $i_\Delta = 1024$ ). Hodnota  $i_\Delta$  nižší než je jeden puls enkodéru je vhodná nejvýše pro měření pomalých pohybů, kde se ještě příliš neprojeví výše popsané chyby enkodérů. Úhlové rozlišení sběru dat určuje frekvenční rozsah dat v řádovém spektru, jak bude popsáno dále.

Shrňme základní výhody měření se skutečnou úhlovou vzorkovací základnou:

- Je možné přímé porovnání naměřených dat s matematickým modelem. Matematické modely a konstrukční návrhy jsou obvykle vyjádřeny v závislosti na úhlu pootočení referenční hřídele.
- Funkční statistiky (jako střední průběh cyklu, směrodatné odchylky od tohoto průběhu, hodnoty a úhlové pozice minimálních a maximálních hodnot) z několika cyklů jsou jednoduše určitelné a přesněji odpovídají významu, který se od nich očekává.
- Ze zmíněných směrodatných odchylek vypočtených bodově z několika cyklů jsou přímo patrné odchylky od periodicity pohybu, včetně jejich úhlových pozic.
- Řádová spektra mohou být vypočtena přímo ze změřených dat, což je přesnější a výhodné zvláště při analýze rozběhů a doběhů strojů.
- Vzhledem k periodicitě měřených dat s periodou odpovídající jedné či více otáčkám referenční hřídele není nutné použití techniky oken při výpočtu Fourierových spekter. Dostatečně vysoký počet vzorků na otáčku (aby byl podchycen celý spektrální obsah) je dostatečnou podmínkou pro měření bez efektu aliasingu.

## 4. Analýza informačního obsahu dat získaných z použité metody

Principy měření pomocí enkodérů jsou relativně jednoduché a jejich implementací např. v zařízení DMU je možné rychle získat záznamy dat. Neuváženým nastavením parametrů měření je však možné do záznamu dat vnést nežádoucí chyby, nebo naopak nemusí být hledaná data v záznamu podchycena. Z tohoto důvodu je vhodné podrobněji analyzovat význam jednotlivých parametrů měření s ohledem na požadovaný informační obsah naměřených dat.

### ■ 4.1 Úhel

#### ■ 4.1.1 Statické rozlišení (kvantovací chyba)

Protože měřený úhel je inkrementován s každou hranou pulsu použitého snímače, může pro jednu otáčku nabývat tolika hodnot, které odpovídají počtu hran pulsů snímače tedy

$$n_{\varphi} = 4 p. \quad (5)$$

Tento údaj závisí pouze na použitém enkodéru. Pro enkodéry s výstupem v podobě harmonického signálu je možné rozlišení ještě zvýšit použitím interpolátoru. Ten z jedné periody pulsu (dvojice funkcí Sin a Cos) vygeneruje  $n_i$  pulsů, obvykle již obdélníkových. Existuje několik forem interpolátorů (viz např. produkty firmy IC-haus na adrese:

<http://www.ichaus.de/productgroup.php?grp=Interpolators>).

Základní rozdělení můžeme předvést na extrémních případech:

- Nejjednodušší interpolátory normalizují signály enkodéru na jednotný rozsah a následně zjišťují úhlovou polohu v rámci pulsu pomocí komparace normalizovaných signálů s předem definovanými úrovněmi. Výhodou těchto interpolátorů je prakticky okamžitá odezva, nevýhodou je relativně nízký stupeň maximální možné interpolace a vysoká citlivost na kvalitu vstupních signálů z enkodéru. Tyto interpolátory jsou použity ve vstupních modulech DMU ve verzi PCI. Reálný maximální stupeň interpolace je 8, při 16-ti násobné interpolaci již dochází k chybám i při poměrně nízkých vstupních frekvencích pulsů. 8 – násobná interpolace je přitom použitelná až do maximální výstupní frekvence generovaných pulsů 500 kHz.

- Nejkomplicovanější interpolátory obsahují procesor schopný učit se tvar pulsů enkodéru (může být např. trojúhelníkový) a korigovat ho, případně je možné tyto interpolátory na takový tvar naprogramovat. Dosahují vysokých stupňů interpolace (až 8192), mají však pomalou odezvu. Proto jsou použitelné pouze u pomalu rotujících součástí s vysokou potřebnou přesností, např. karuselů u obráběcích strojů.

Výstupní rozlišení úhlu je v reálném případě limitováno digitálním rozsahem ukládaných dat. Při nejobvyklejším způsobu ukládání v podobě 16 – bitových celých čísel může hodnota úhlu nabývat nejvýše  $2^{16} = 65\,536$  hodnot. Při měření úhlu v rozsahu  $\langle \varphi_{\min}, \varphi_{\max} \rangle$  je tedy kvantovací chyba měření úhlu

$$\delta_{\varphi} = \text{Max} \left( \frac{360}{4 p n_i}, \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{2^{16}} \right) / 2 [\text{deg}] = \text{Max} \left( \frac{45}{p n_i}, \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{2^{17}} \right) [\text{deg}], \quad (6)$$

kde  $n_i$  je použitý stupeň interpolace.

#### ■ 4.1.2 Optimální nastavení

Optimálního rozlišení měření úhlu je dosaženo maximálním přiblížením počtu hran (případně interpolovaných) k digitálnímu rozsahu ukládání dat. Označme  $b$  počet bitů použitých k uložení výsledné hodnoty úhlu. Vzhledem k nepřesnostem zaneseným interpolací se vždy snažíme použít snímač s co nejvyšším počtem pulsů  $p$  a co nejnižším stupněm interpolace  $n_i$  a to tak, abychom se co nejvíce přiblížili digitálnímu rozlišení. Za předpokladu měření úhlu v rozsahu  $\varphi_{\min} \div \varphi_{\max} [\text{deg}]$  hledáme nejvyšší možný stupeň interpolace  $n_i$  takový, že počet pulsů snímače po interpolaci v zadaném úhlovém intervalu je menší než počet možných binárních hodnot reprezentujících naměřený úhel, tedy

$$4 p n_i (\varphi_{\max} - \varphi_{\min}) / 360^{\circ} \leq 2^b. \quad (7)$$

Při pouhém nastavení tohoto stupně interpolace a žádaného rozsahu měřených hodnot úhlu však dojde ještě k jedné chybě. Pokud  $2^b / (4 p n_i (\varphi_{\max} - \varphi_{\min}) / 360^{\circ})$  není celé číslo (je tedy větší než jedna), pak dosahované hodnoty úhlu nelze beze zbytku vyjádřit pomocí celých čísel na výstupu a dochází k periodické zaokrouhlovací chybě. To má za následek (periodicky) kolísající chybu. Řešení celého problému je jednoduché. Stačí rozšířit měřený rozsah tak, že jeho část nebude nikdy dosažena, tedy reálně dosáhneme na méně než  $2^b$  hodnot, přitom přírůstek úhlu ve fyzikálních



jednotkách bude odpovídat právě jednomu inkrementu v binární reprezentaci. Inkrement úhlu ve fyzikálních jednotkách, např. ve stupních, je roven

$$\Delta\varphi = \frac{360^\circ}{4 p n_i}. \quad (8)$$

Měřený rozsah úhlu nastavíme např. na  $\langle \varphi_{\min}, \varphi_{\min} + \Delta\varphi(2^b - 1) \rangle$ . Lepší je rozšířit rozsah oběma směry. Ve vzorci bylo odečteno 1, protože hodnota  $\varphi_{\min}$  odpovídá digitální hodnotě 0, a hodnota  $\varphi_{\min} + \Delta\varphi(2^b - 1)$  digitální hodnotě  $2^b - 1$ .

Takto nastavený rozsah může však být mnohonásobně větší, než je potřebné. Je možné ho zkrátit zvolením podílového inkrementu úhlu ve fyzikálních jednotkách

$$\Delta\hat{\varphi} = \frac{360^\circ}{4 p n_i r}, \quad r = \left\lfloor \frac{\Delta\varphi(2^b - 1)}{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}} \right\rfloor. \quad (9)$$

V binární reprezentaci pak bude z  $r$  po sobě následujících hodnot realizovaná vždy jen jedna, bude však přesně odpovídat požadovanému úhlu ve skutečných jednotkách. Příklad vlivu popsaného nastavení bude uveden dále na obrázcích 3 a 4.

Obvykle je úhel měřen v rozsahu jedné základní periody, např.  $0 \div 360^\circ$  pro stále kladnou úhlovou rychlost, nebo  $-360^\circ \div +360^\circ$  pro kývavé či vratné pohyby. Při průchodu nulovým pulsem je pak úhel vynulován. Pokud rychlost nemění znaménko, je takto získán pilovitý průběh úhlu. Ten je potřebné pro další zpracování tzv. rozbalit, tedy přičíst po blocích vhodnou konstantu tak, aby průběh úhlu byl spojitý a monotónní. Výhodou tohoto přístupu je možnost proměřit velké množství cyklů úhlu s relativně malým rozsahem, tedy vysokým binárním rozlišením.

#### ■ 4.1.3 Nejistota měření

Vlivem kvantovací chyby měření úhlu dochází k určité nejistotě měření vlivem měřicí metody. Předpokládáme-li optimální nastavení přístroje podle předchozího odstavce, je maximální odchylka zdroje nejistot v různých stavech rovna kvantovací chybě podle vztahu (6)

$$\delta_\varphi = \frac{45}{p n_i} [\text{deg}], \quad (10)$$

kde  $p$  je počet pulsů použitého enkodéru a  $n_i$  je stupeň interpolace. Tato

nejistota bude mít rovnoměrné rozložení.

## ■ 4.2 Úhlová rychlost

### ■ 4.2.1 Statické rozlišení (kvantovací chyba)

Úhlová rychlost s použitím jednoho čítače při vzorkování času s periodou  $\Delta t$ , resp. vzorkovací frekvencí  $\nu_{vz} = 1 / \Delta t$  (viz (1)), je dána vztahem

$$\begin{aligned} \omega(\varphi) &= \frac{\Delta \varphi}{\Delta t(\varphi)} = 60 \frac{i_\omega}{p} \frac{1}{t(\varphi) - t(\varphi - \Delta \varphi)} [\text{RPM}] \doteq \\ &60 \frac{i_\omega}{p} \frac{\nu_{vz}}{n} [\text{RPM}], \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (11)$$

Úhlová rychlost je tedy určena (pokud se nezměnilo její znaménko) z  $n$  cyklů čítače. Hodnota  $n$  při zadaných parametrech měření (počet pulsů enkodéru  $p$ , počet pulsů, přes které se rychlost měří,  $i_\omega$  a vzorkovací frekvence  $\nu_{vz}$ ) jednoznačně odpovídá úhlové rychlosti  $\omega$  podle vztahu nepřímé úměry

$$n(\omega) = \left\lfloor 60 \frac{i_\omega}{p} \frac{\nu_{vz}}{\omega [\text{RPM}]} \right\rfloor. \quad (12)$$

Pokud je tedy úhlová rychlost měřena v rozsahu  $\langle \omega_{\min}, \omega_{\max} \rangle$ , ve kterém úhlová rychlost nemění znaménko (předpokládejme bez újmy na obecnosti, že je kladná), lze udělat horní odhad počtu možných hodnot rychlosti jako rozdíl  $n(\omega_{\min}) - n(\omega_{\max})$ . Kvantovací chyba měření rychlosti pro rychlost  $v$  [RPM] v daném rozsahu pro 16-bitový výstup je tedy přibližně

$$\begin{aligned} \delta_\omega &= \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2 \text{Min}(n(\omega_{\min}) - n(\omega_{\max}), 2^{16})} \doteq \\ &\text{Max} \left( p \frac{\omega_{\min} \omega_{\max}}{60 i_\omega \nu_{vz}}, \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2^{16}} \right) / 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Uvedme si konkrétní příklady. Mějme enkodér s  $p = 1000$  pulsů na otáčku. Úhlová rychlost je měřena v intervalu  $600 \div 1200$  RPM, zvolme  $i_\omega = 1$ , tedy měříme rychlost přes každý puls enkodéru. Čas je měřen s rozlišením 10 ns, tedy s vzorkovací frekvencí 100 MHz. Pro tento případ úhlová rychlost nabývá

$$n(600 \text{ RPM}) - n(1200 \text{ RPM}) = 1591 - 795 = 796 \text{ hodnot.} \quad (14)$$

Kvantovací chyba je tedy

$$\delta_\omega = \frac{1200 - 600}{2 * 796} \text{ RPM} = 0.377 \text{ RPM.} \quad (15)$$

Pro stejnou velikost rozsahu měřené rychlosti, ale ve vyšším pásmu rychlostí  $\omega_{\min} = 2700 \text{ RPM}$ ,  $\omega_{\max} = 3300 \text{ RPM}$  při zachování všech ostatních parametrů ovšem dostáváme

$$n(2700 \text{ RPM}) - n(3300 \text{ RPM}) = 353 - 289 = 64 \text{ hodnot.} \quad (16)$$

Kvantovací chyba je tedy

$$\delta_{\omega} = \frac{3300 - 2700}{2 * 64} \text{ RPM} = 4.688 \text{ RPM.} \quad (17)$$

Kvantovací chyba se tedy zvýšila 12-krát, zatímco střední úhlová rychlost se zvýšila pouze 3.3-krát. To je způsobeno nepřímou úměrou ve vztahu (13).

Při měření s více čítači, mezi kterými je úhlové zpoždění  $\phi$ , dochází k průměrování hodnot čítačů a tedy k získání nových možných hodnot, přesněji použitím  $k + 1$  čítačů se sníží kvantovací chyba  $(k + 1)$ -krát.

#### ■ 4.2.2 Optimální nastavení

Jediným parametrem, který lze v konkrétním případě měření měnit, je počet pulsů, přes které se měří rychlost  $i_{\omega}$ . Za předpokladu, že úhlová rychlost nemění během měřeného pohybu své znaménko, v následujícím je např. kladná, je z hlediska minimální kvantovací chyby optimální nastavení tohoto parametru rovno

$$i_{\omega} = \left\lfloor n_{\max} \frac{p}{60 \nu_{\text{vz}}} \frac{\omega_{\min} \omega_{\max}}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} \right\rfloor \text{ pro rychlost [RPM],} \quad (18)$$

kde  $n_{\max}$  je maximální počet hodnot, kterých by rychlost mohla teoreticky dosahovat, obvykle většinové procento z celkového počtu hodnot daného digitálním rozlišením  $2^b$ .

Takto získaný parametr  $i_{\omega}$  však může být i relativně vysoký. Měření rychlosti přes velký počet pulsů pak způsobuje velké zpoždění výstupních hodnot (musí se proměřit mnoho pulsů, než může být jedna výsledná hodnota vypočtena). Rozhodně by také neměla být rychlost měřena přes větší úhlový interval, než který odpovídá polovině Nyquistovy řádové periody (tedy převrácené hodnotě z dvojnásobku Nyquistovy řádové frekvence) pro měření rychlosti. Pak by totiž měřením docházelo k nevratné redukci informačního rozsahu úhlové rychlosti a k jejímu znečištění aliasingem. Jaká je maximální optimální hodnota parametru  $i_{\omega}$  je ovšem obvykle neznámé, je možné ji určit buď pokusným měřením a výpočtem jejího frekvenčního obsahu, nebo odhadem na základě povahy měřeného děje.

Obecně doporučujeme volit alespoň  $p/i_\omega \geq 90$ , tedy hodnota úhlové rychlosti je vypočtena každé  $4^\circ$  pootočení.

Pokud měřená rychlost mění během pohybu znaménko, není uvedený postup platný. Při úhlových rychlostech blízkých nule dosahuje počet realizovaných cyklů čítače  $n$  velmi vysokých hodnot. V těchto případech se jeví jako vhodné použití algoritmu dynamické změny parametru  $i_\omega$ , jak bude popsáno níže. Maximální přípustné  $i_\omega$  je vhodné volit podle vztahu (18) s parametry  $\hat{\omega}_{\max} = \text{Max}(|\omega_{\min}|, |\omega_{\max}|)$ ,  $\hat{\omega}_{\min} = \hat{\omega}_{\max} / 4$ .

### ■ 4.2.3 Nejistota měření

Vlivem kvantovací chyby měření úhlové rychlosti dochází k určité nejistotě měření vlivem měřicí metody. Předpokládáme-li opět optimální nastavení přístroje podle předchozího odstavce, je maximální odchylka od zdroje nejistot v různých stavech rovna kvantovací chybě podle vztahu (13) a (18)

$$\delta_\omega = \text{Max}\left(3 \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2^{14}}, \frac{3 \omega_{\min} \omega_{\max}}{4 v_{\text{vz}}}\right) [\text{RPM}], \quad (19)$$

kde úhlová rychlost je měřena v rozsahu  $\langle \omega_{\min}, \omega_{\max} \rangle [\text{RPM}]$  a  $v_{\text{vz}}$  je vzorkovací frekvence měřiče času. Druhý člen je realizován, pokud parametr  $i_\omega > p/90$ . Pro úhlové rychlosti dostatečně vzdálené od nulové rychlosti můžeme uvažovat rovnoměrné rozložení této nejistoty.

### ■ 4.2.4 Fázové zpoždění naměřených hodnot úhlové rychlosti

Výše uvedený algoritmus ve skutečnosti neměří okamžitou hodnotu úhlové rychlosti, ale její časovou střední hodnotu v zadaném úhlovém intervalu. Bylo by možné přibližně odhadnout časový okamžik, ve který je této hodnoty úhlové rychlosti skutečně nabyto?

Předpokládejme dva základní možné scénáře: buď v daném úhlovém intervalu nabývá úhlová rychlost svého extrému, který záhy opouští, nebo v tomto úhlovém intervalu má přibližně monotónní spád/růst s úhlovým zrychlením  $\varepsilon$ . Zaměřme se na druhý případ, který je jednodušší a častější. Předpokládejme růst úhlové rychlosti z hodnoty  $\omega_0$  na hodnotu  $\omega_1$  s úhlovým zrychlením  $\varepsilon$  v čase od  $t_0 = 0$  do  $t_1 = (\omega_1 - \omega_0) / \varepsilon$ . Průběh úhlu je integrálem úhlové rychlosti jako funkce času, tedy  $\varphi(t) = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2$ . Odtud je možné vyjádřit čas potřebný k natočení o úhel  $\varphi$  při počáteční úhlové rychlosti  $\omega_0$  jako inverzní funkci (hledáme jen kladné řešení):

$$t_{\omega_0}(\varphi) = \frac{\omega_0}{\varepsilon} \left( \sqrt{1 + \frac{2\varphi\varepsilon}{\omega_0^2}} - 1 \right). \quad (20)$$

Za daných předpokladů by měřená úhlová rychlost měla správně nabýt naměřené hodnoty právě uprostřed časového intervalu  $\langle t_0, t_{\omega_0}(\Delta\varphi) \rangle$ , tedy v čase

$$\frac{t_{\omega_0}(\Delta\varphi) + t_0}{2} = \frac{\omega_0}{2\varepsilon} \left( \sqrt{1 + \frac{2\Delta\varphi\varepsilon}{\omega_0^2}} - 1 \right) \quad (21)$$

od začátku měření patřičného úhlového úseku. Výraz (21) se odlišuje od okamžiku v polovině měřeného úhlového úseku  $t_{\omega_0}(\Delta\varphi/2)$  až v druhé mocnině Taylorova rozvoje, tedy nejvýše o  $\Delta\varphi^2\varepsilon/(8\omega_0)$ . Pro běžné hodnoty počtu pulsů použitého enkodéru na otáčku, neboli pro běžné hodnoty úhlového intervalu  $\Delta\varphi$ , je tedy možné tento rozdíl zanedbat a fázové zpoždění naměřených hodnot úhlové rychlosti považovat přibližně rovné  $\Delta\varphi/2$ . Při použití více čítačů můžeme zopakovat předchozí úvahu a umístit nejpravděpodobnější výskyt úhlové rychlosti s naměřenou hodnotou doprostřed sjednocení úhlových intervalů, přes který se úhlová rychlost měří. Při použití  $k+1$  čítačů fázově posunutých o úhel  $\phi$  má toto sjednocení velikost  $\Delta\varphi + k\phi$ , fázové zpoždění naměřené hodnoty vůči pravděpodobné pozici této hodnoty je tedy  $(\Delta\varphi + k\phi)/2$ .

#### ■ 4.2.5 Popis dynamiky měření

Zajímavou otázkou je, kolika hodnot reálně nabude úhlová rychlost při určitém svém průběhu. Situaci budeme analyzovat pro nejjednodušší případ růstu rychlosti z hodnoty  $\omega_0$  na hodnotu  $\omega_n$  s konstantním úhlovým zrychlením  $\varepsilon$ . Úhlová rychlost je vypočtena vždy po pootočení o úhlový interval  $\Delta\varphi$ , můžeme tedy určit jednotlivé hodnoty úhlové rychlosti pomocí vztahu (20)

$$\omega_{j+1} = \omega_j + \varepsilon t_{\omega_j}(\Delta\varphi) = \sqrt{\omega_j^2 + 2\Delta\varphi\varepsilon}. \quad (22)$$

K přechodu z úhlové rychlosti  $\omega_0$  na hodnotu  $\omega_n$  je potřeba  $n$  pootočení o úhlový interval  $\Delta\varphi$ , což můžeme vyjádřit jako

$$\omega_n = \omega_0 + \varepsilon t_{\omega_0}(n\Delta\varphi) = \sqrt{\omega_0^2 + 2n\Delta\varphi\varepsilon}. \quad (23)$$

Odtud vidíme, že

$$n = \frac{\omega_n^2 - \omega_0^2}{2\Delta\varphi\varepsilon}. \quad (24)$$

Vidíme tedy, že na rozdíl od statického rozlišení (kvantovací chyby), dynamické rozlišení vyjádřené pomocí počtu hodnot, kterých úhlová rychlost při zadaném úhlovém zrychlení reálně nabývá, s rostoucím úhlovým intervalem  $\Delta\varphi$  klesá, podobně i s rostoucím úhlovým zrychlením  $\varepsilon$ . Tohoto závěru využijeme pro optimalizaci nastavení měření s vysokou dynamikou.

Uvedená analýza má smysl pro měření rozběhů či doběhů strojů. Nekonstantní úhlové zrychlení je v tomto případě možné nahradit dolní a horní limitní hodnotou. Při měření ustálených periodických dějů úhlové zrychlení kolísá kolem nulové hodnoty, a proto výraz (24) nelze použít.

#### ■ 4.2.6 Měření s vysokou dynamikou

Za účelem měření rozběhů a doběhů a kývavých pohybů je v přístroji DMU implementována funkce automatického přepínání velikosti úhlového intervalu  $\Delta\varphi$ , přes který se úhlová rychlost měří, a to v závislosti na aktuální úhlové rychlosti. Pro tento mód je zatím použit vždy pouze jeden čítač času. Je určen třemi parametry. Parametr "Zarážka" určuje největší možný úhlový interval, přes který je možno měřit. Parametr "Dynamika" popisuje, jak často je při růstu úhlové rychlosti prodloužen úhlový interval  $\Delta\varphi$  (vždy na dvojnásobek). Parametr "Hystereze" umožňuje při poklesu úhlové rychlosti definovat nižší četnost zkrácení úhlových intervalů, než je při růstu. Zkrácení úhlového intervalu  $\Delta\varphi$  je vždy na poloviční délku.

Přesná implementace spočívá v čekání na překročení určité hodnoty v měřiči času. Nechť  $\Delta t_{\max}$  je tato maximální hodnota měřiče času, při které při růstu rychlosti je úhlový interval  $\Delta\varphi$ , přes který je čas měřen, prodloužen o násobek  $\beta$ . Nechť  $\Delta t_{\min} \leq \Delta t_{\max}$  je minimální hodnota měřiče času, při které při poklesu rychlosti je úhlový interval  $\Delta\varphi$ , přes který je čas měřen, zmenšen faktorem  $\beta$ . Dále doplníme počáteční podmínky: při nulové rychlosti je čas měřen přes základní úhlový interval  $\Delta\varphi_{\min}$ , který reálně odpovídá úhlové vzdálenosti dvou nejbližších hran enkodéru. Je patrné, že k  $n$ -tému přepnutí velikosti úhlového intervalu  $\Delta\varphi$  dojde při růstu rychlosti při překročení rychlosti  $\Delta\varphi_{\min} \beta^{n-1} / \Delta t_{\max}$ . Naopak při poklesu rychlosti dojde k přepnutí velikosti úhlového intervalu  $\Delta\varphi$  při překročení rychlosti  $\Delta\varphi_{\min} \beta^{n-1} / \Delta t_{\min}$ . V implementaci zařízení DMU4 je vždy  $\beta = 2$ ,  $\Delta t_{\max} = \Delta t 2^{23-d}$  a  $\Delta t_{\min} = \Delta t 2^{23-d+h}$ , kde  $\Delta t = 10^{-8} s$  je základní perioda vzorkování času,  $d$  je dynamika a  $h$  je hystereze módu automatického přepínání velikosti úhlového intervalu  $\Delta\varphi$ . Parametr  $d$  nabývá hodnot 0, ..., 8 a

parametr  $h$  hodnot  $0, \dots, d$ . Po dosazení získáváme limitní hodnoty rychlosti pro přepínání při růstu

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_n &= \frac{\Delta\varphi_{\min} 2^{n-1}}{\Delta t 2^{23-d}} = \frac{\Delta\varphi_{\min} 2^{n-24}}{\Delta t} 2^d, \\ \underline{\omega}_n &= \frac{\Delta\varphi_{\min} 2^{n-1}}{\Delta t 2^{23-d+h}} = \frac{\Delta\varphi_{\min} 2^{n-24}}{\Delta t} 2^{d-h}.\end{aligned}\quad (25)$$

Konkrétní příklad hodnot úhlových rychlostí  $\overline{\omega}_n$  pro snímač s 3600 pulsy je uveden v tabulce 1.

$n \backslash d$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1/4	0	0.2	0.8	3.2	12.7	50.9	204	814	3255
1/2	0.1	0.4	1.6	6.4	25.4	102	407	1628	6510
1	0.2	0.8	3.2	12.7	50.9	204	814	3255	13 021
2	0.4	1.6	6.4	25.4	102	407	1628	6510	26 042
4	0.8	3.2	12.7	50.9	204	814	3255	13 021	52 083
8	1.6	6.4	25.4	102	407	1628	6510	26 042	104 167
16	3.2	12.7	50.9	204	814	3255	13 021	52 083	208 333
32	6.4	25.4	102	407	1628	6510	26 042	104 167	416 667
64	12.7	50.9	204	814	3255	13 021	52 083	208 333	833 333

*Tabulka 1: Úhlové rychlosti [RPM], při nichž dojde k přepnutí na měření přes daný počet pulsů (řádky) pro zvolený parametr dynamiky  $d$  (sloupce). Pro snímač s 3600 pulsy.*

Ze vztahů (25) je patrná funkce parametrů  $d$  a  $h$ . Je zřejmé, že  $\overline{\omega}_n(d+1) = \overline{\omega}_{n-1}(d)$ , tedy zvýšení parametru  $d$  o jedničku zajistí přepnutí úhlového intervalu  $\Delta\varphi$  pro měření rychlosti o jednu úroveň dřív. Nyní nastává otázka, jaké je optimální nastavení parametrů  $h$  a  $d$ . Určeme statické rozlišení v intervalech úhlové rychlosti  $\langle \overline{\omega}_{n-1}, \overline{\omega}_n \rangle$ . Protože statické rozlišení se zlepšuje s prodlužováním úhlového intervalu  $\Delta\varphi$  a závisí na počtu hodnot, kterých může čítač nabýt, je patrné, že pro statické rozlišení je vždy nejvýhodnější co nejdelší čas  $\Delta t_{\max}$ , tedy minimální dynamika  $d = 0$ . Na základě vztahu (12) můžeme přesně určit počet hodnot  $n_s$ , kterých rychlost nabývá v tomto intervalu (odpovídá statickému rozlišení), jako

$$\begin{aligned}n_s &= \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \left( \frac{1}{\overline{\omega}_{n-1}} - \frac{1}{\overline{\omega}_n} \right) = \\ &= \frac{\Delta\varphi_{\min} 2^{n-2}}{\Delta t} \left( \frac{\Delta t}{\Delta\varphi_{\min} 2^{n-25} 2^d} - \frac{\Delta t}{\Delta\varphi_{\min} 2^{n-24} 2^d} \right) = 2^{22-d}.\end{aligned}\quad (26)$$

Jemnějšího statického rozlišení tedy docílíme minimálním parametrem dynamiky  $d = 0$ .

Vyjádříme ovšem nyní počet hodnot, kterých úhlová rychlost reálně nabyde mezi dvěma přepnutími úhlového intervalu  $\Delta\varphi$  pro měření rychlosti pomocí vztahu (24)

$$n_d = \frac{\overline{\omega_n^2} - \overline{\omega_{n-1}^2}}{2 \Delta\varphi \varepsilon} = \frac{3 \Delta\varphi_{\min}}{\varepsilon \Delta t^2} 2^{n+d-50}. \quad (27)$$

V tabulce 2 je vyčíslena hodnota parametru  $n_d$  pro snímač s 3600 pulsy a velmi malé konstantní úhlové zrychlení  $0.1 \text{ s}^{-2}$ . S vyšším úhlovým zrychlením či vyšším počtem pulsů snímače jsou hodnoty parametru  $n_d$  ještě nižší. Nízké hodnoty ukazují, že pro řadu počátečních stupňů přepnutí  $n$  nebude realizována žádná hodnota úhlové rychlosti! Pro reálnější případ vyššího úhlového zrychlení je situace ještě horší.

$n \backslash d$	1	2	3	4	5	6	7	8
1/4	0	0	0	1	1	2	5	9
1/2	0	0	1	1	2	5	9	19
1	0	1	1	2	5	9	19	38
2	1	1	2	5	9	19	38	76
4	1	2	5	9	19	38	76	152
8	2	5	9	19	38	76	152	303
16	5	9	19	38	76	152	303	606
32	9	19	38	76	152	303	606	1213
64	19	38	76	152	303	606	1213	2425

*Tabulka 2: Dynamické rozlišení jako počet hodnot, které budou realizovány při měření úhlové rychlosti při přechodu intervalu mezi dvěma přepnutími velikosti úhlového intervalu, přes který se měří (řádky, v počtu pulsů), pro zvolený parametr dynamiky  $d$ . Pro snímač s 3600 pulsy a konstantní úhlové zrychlení  $0.1 \text{ Hz/s}$ .*

Na rozdíl od statického rozlišení je z hlediska dynamiky výhodné, aby parametr  $d$  byl co nejvyšší. Celkově můžeme říci, že vzhledem k limitům vtištěným hardwarem je použitelnost uvedeného algoritmu velmi omezená. V algoritmu se vyskytují tři teoretické možnosti vylepšení:

1) Prvním limitujícím faktorem je rozšiřování úhlového intervalu  $\Delta\varphi$  pouze faktorem 2. Tento faktor je nutností pro nízké hodnoty úhlového intervalu  $\Delta\varphi = 1/4, 1/2$  a 1 puls. Teoreticky by bylo možné implementovat algoritmus, který by pokračoval jinou než geometrickou řadou, což by přineslo zhuštění



jednotlivých přepnutí. Komplikace by ovšem byly značné, neboť by bylo nutno tímto faktorem upravovat i násobící konstanty pro převod naměřených údajů na fyzikální jednotky. Zisk by ve skutečnosti nebyl tak dramatický.

2) Další místo, kde se však projevuje mocnina dvojky, je u časového intervalu  $\Delta t_{\max} = \Delta t 2^{23-d}$ , při jehož dosažení dochází k přepnutí. Tímto parametrem je ovlivněna strmost růstu dynamického rozlišení. Ve skutečnosti spodní meze parametru  $d$  nejsou v praxi příliš použitelné. Zvýšením faktoru 2 by se posunula použitelnost i pro nižší hodnoty  $d$  a snížil by se počet přepnutí. To by bylo obzvláště významné pro vyšší úhlová zrychlení.

3) Ze všeho nejvíce samozřejmě otázku rozlišení ovlivní vzorkovací frekvence měřiče času. Její zvýšení by posunulo tento automatický mód k mnohem lepším možnostem, neboť se ve vztahu pro dynamické rozlišení vyskytuje v druhé mocnině a ovlivňuje tak mnohem větší rozsah úhlových rychlostí a zrychlení.

Navržená metoda je obzvláště vhodná pro dlouhé rozběhy úhlové rychlosti s relativně nízkým úhlovým zrychlením a pro velmi pomalé kývavé pohyby. Pro přesné měření velmi dynamických kývavých pohybů by bylo vhodnější především použití vyšší vzorkovací frekvence měřiče času.

Na závěr ještě poznámku k parametru hystereze  $h$ . Smyslem tohoto parametru je zabránit častému přepínání úhlového intervalu  $\Delta\varphi$  pro měření úhlové rychlosti při kolísání úhlové rychlosti kolem přepínací úrovně  $\overline{\omega_n}$ . Parametr by měl být nastaven tak, aby při ustálení úhlové rychlosti k přepnutí velikosti úhlového intervalu  $\Delta\varphi$  nedošlo, tedy aby úhlová rychlost kolísala mezi hodnotami  $\underline{\omega_n}$  a  $\overline{\omega_n}$  pro určité konkrétní  $n$ . Při měření pouze rozběhu či doběhu či kývavých pohybů bez ustáleného chodu obvykle stačí hodnota  $h = 1$ .

#### ■ 4.2.7 Výpočet diferenčního úhlu integrací úhlové rychlosti

Při přímém měření úhlu čítáním jednotlivých hran, jak bylo popsáno výše, je minimální velikost úhlového kroku daná převrácenou hodnotou počtu pulsů snímače. Pro analýzu torzních kmitů, tedy měření rozdílů dvou úhlů však může být takové rozlišení nedostatečné. Je možné použít alternativní metodu výpočtu úhlu numerickou integrací naměřené úhlové rychlosti, resp. rozdílů dvou úhlových rychlostí. Předpokládejme pro jednoduchost měření rozdílů úhlových rychlostí (bez převodu) shodnými snímači s  $p$  pulsy. Rozdíl úhlů  $\varphi = \varphi_B - \varphi_A$  v  $i + 1$ . kroku měření můžeme spočítat jako

$$\varphi_{i+1} = \varphi_B(t_{i+1}) - \varphi_A(t_{i+1}) = \varphi_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\omega_B(\tau) - \omega_A(\tau)) d\tau \doteq \varphi_i + (\omega_B(t_{i+1}) - \omega_A(t_{i+1})) (t_{i+1} - t_i). \quad (28)$$

Úhlová rychlost je, jak již bylo popsáno výše, určena počtem kroků  $n$  čítače měřicího čas pracujícího se vzorkovací frekvencí  $\nu_{vz}$  (viz (11)). Integrační čas je také určen časovou délkou pulsu, řekněme snímače  $A$ . Dosazením získáme

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1} &= \varphi_i + \frac{60 \nu_{vz}}{p} \left( \frac{1}{n_B} - \frac{1}{n_A} \right) \frac{n_A}{\nu_{vz}} = \\ &\varphi_i + \frac{60 \nu_{vz}}{p n_B} (n_A - n_B) \frac{1}{\nu_{vz}} = \varphi_i + \frac{\omega_B[\text{RPM}]}{6 \nu_{vz}} (n_A - n_B). \end{aligned} \quad (29)$$

Je patrné, že kvantovací chyba (polovina rozdílu  $\varphi_{i+1} - \varphi_i$ ) již není explicitně závislá na počtu pulsů použitého snímače, ale na vzorkovací frekvenci čítače času  $\nu_{vz}$  a přibližně střední hodnotě úhlové rychlosti, na které jsou torzní kmitý superponované. Vzorkovací frekvence  $\nu_{vz}$  může být o několik řádů vyšší než počet pulsů snímače na otáčku. Tímto postupem je tedy možné zachytit torzní kmitý běžně o 3 až 4 řády menší, než přímým měřením rozdílu úhlu podle vztahu (5). Např. zatímco použitím snímače s 3600 pulsy na otáčku se klasickou metodou měření úhu docílí úhlové rozlišení  $0.025^\circ = 2.5 \times 10^{-2}^\circ$ , metodou podle vztahu (29) je při vzorkovací frekvenci měření času  $\nu_{vz} = 100 \text{ MHz}$  při střední hodnotě úhlové rychlosti  $\omega_B = 1500 \text{ RPM}$  dosaženo úhlového rozlišení až  $2.5 \times 10^{-7}^\circ$  (za předpokladu minimálního měřitelného rozdílu čítačů  $n_A - n_B = 1$ ). Je zřejmé, že tato metoda je obzvláště přesná pro velmi malé rozdíly úhlových rychlostí (malé amplitudy torzních kmitů).

Ve skutečnosti parametry  $n_A$  a  $n_B$  implicitně závisí na počtu pulsů snímače za otáčku. Je-li počet pulsů snímače na otáčku vyšší, dosáhnou čítače použité pro měření úhlových rychlostí nižších hodnot parametrů  $n_A$  a  $n_B$ . Docházíme tedy k opačnému závěru než ve vztahu (12) - zatímco pro vyšší rozlišení měření úhlové rychlosti pomocí inkrementálních snímačů je vhodnější nižší počet pulsů použitého snímače za otáčku, pro vyšší rozlišení úhlu získaného integrací úhlové rychlosti je výhodnější vyšší počet pulsů snímače na otáčku.

## ■ 4.3 Úhlové zrychlení

### ■ 4.3.1 Statické rozlišení (kvantovací chyba)

Úhlové zrychlení je v zařízení DMU vypočteno z časových délek dvou po sobě následujících úhlových intervalů určených počty kroků měřiče času  $n_0$ ,  $n_1$  (viz (3))

$$\varepsilon(\varphi) \doteq \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{2 \pi i_\varepsilon v_{vz}}{p} \left( \frac{1}{(n_1 + n_0) n_1} - \frac{1}{(n_1 + n_0) n_0} \right) \left[ \frac{\text{rad}}{s^2} \right]. \quad (30)$$

Hodnoty  $n_0$  a  $n_1$  odpovídají dvěma po sobě naměřeným hodnotám úhlové rychlosti, která se však za účelem výpočtu úhlového zrychlení měří přes  $i_\varepsilon$  pulsů nezávisle na obdobném parametru  $i_\omega$  použitým pro přímé měření rychlosti. Předpokládejme tedy, že veličiny  $n_0$  a  $n_1$  mohou nabývat hodnot v intervalu  $\langle n_{\min}, n_{\max} \rangle$ , kde

$$\begin{aligned} n_{\min} &= \frac{360 i_\varepsilon v_{vz}}{p} \frac{1}{\omega_{\max} [\text{deg} / s]}, \\ n_{\max} &= \frac{360 i_\varepsilon v_{vz}}{p} \frac{1}{\omega_{\min} [\text{deg} / s]}, \end{aligned} \quad (31)$$

Předpokládejme, že rychlost nemění znaménko, resp. bez újmy na obecnosti je kladná. Rozlišení měření času tedy odpovídá  $N = n_{\max} - n_{\min} + 1$  hodnotám, kterých může měřič času nabýt. Součet hodnot  $n_0 + n_1$  může nabýt  $2N$  hodnot, součinem s  $n_0$ , resp.  $n_1$  získáme celkem  $2N^2$  možných hodnot. Konečně rozdílem obou zlomků získáme  $4N^2$  hodnot, kterých může úhlové zrychlení teoreticky nabývat. Pokud by úhlové zrychlení neměnilo znaménko, bylo by možné tuto hodnotu o něco redukovat, v reálném případě však tomu nikdy nenastává. V reálných případech je také kvůli eliminaci šumu v úhlové rychlosti zesíleného diferencí ve výpočtu zrychlení měřeno zrychlení přes delší úhlový interval než rychlost. Z toho důvodu problémy se statickým rozlišením u zrychlení narozdíl od měření rychlosti prakticky nenastávají. Kvantovací chyba je přibližně

$$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{2 \text{Min}(4N^2, 2^{16})}. \quad (32)$$

Použití více čítačů pro měření času při výpočtu zrychlení přirozeně opět přinese úměrné zvýšení rozlišení. Hlavní efekt je však především v redukci šumu.

### ■ 4.3.2 Optimální nastavení

Jediným parametrem, který je možné v reálném případě volit, je počet pulsů, přes které se měří rychlosti za účelem výpočtu zrychlení  $i_\varepsilon$ . Nastavíme ho tak, aby  $4N^2 > 2^{16}$ , tedy  $N > 2^7$

$$i_\varepsilon \geq \left\lceil \frac{2^7 p \omega_{\min} \omega_{\max}}{360 \nu_{\text{vz}} (\omega_{\max} - \omega_{\min})} \right\rceil. \quad (33)$$

Parametr  $i_\varepsilon$  má význam také v redukci šumu, kterého je obvykle v úhlovém zrychlení obsaženo hodně. Má smysl tedy tento parametr volit spíše větší.

### ■ 4.3.3 Fázové zpoždění naměřených hodnot úhlového zrychlení

U zrychlení je významná otázka fázového zpoždění naměřené hodnoty vůči pravděpodobné úhlové/časové pozici skutečného úhlového zrychlení s touto hodnotou. Zopakujeme úvahu použitou u této otázky pro úhlovou rychlost a získáme fázové zpoždění v úhlové doméně  $(2\Delta\varphi + k\phi)/2$ . Dvojnásobek ve výrazu přibyl, protože pro určení hodnoty zrychlení jsou použity dva poslední úhlové intervaly. Komplikovanější je ovšem tento výsledek pro časovou hodnotu fázového zpoždění. Pro nízké hodnoty úhlové rychlosti je toto úhlově konstantní fázové zpoždění v časové doméně mnohem delší než pro vysoké úhlové rychlosti. Označíme-li úhlové fázové zpoždění  $\tau_\varphi$ , pak časové fázové zpoždění v časové doméně v bodě  $\varphi$  je rovno (při použití jediného čítače, tedy  $\tau_\varphi = \Delta\varphi$ )

$$\tau_t = \int_{\varphi}^{\varphi+\tau_\varphi} \frac{1}{\omega(\phi)} d\phi \doteq \frac{\Delta\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (34)$$

Jaké jsou možnosti redukce proměnného fázového zpoždění při měření v závislosti na čase?

1) Nejjednodušší a obvykle plně dostačující možností je považovat přímo naměřené úhlové zpoždění pouze jako orientační. Přesnější průběh úhlového zrychlení lze získat numerickou derivací úhlové rychlosti v postprocessingu.

2) Částečnou redukci by bylo možné docílit adaptivní změnou úhlového intervalu  $\Delta\varphi$  (jmenovitě parametru  $i_\varepsilon$ ) v závislosti na aktuální úhlové rychlosti tak, aby veličina  $\tau_t$  zůstávala přibližně konstantní. Efekt by však byl jen velmi omezený a přinesl by další nedostatky v růstu šumu pro nízké hodnoty parametru  $i_\varepsilon$ .

3) Je možné také sestavit adaptivní transformaci, která provede redukci fázového zpoždění. Předpokládejme časový záznam úhlu  $\varphi(t)$ , úhlové rychlosti  $\omega(t)$  a úhlového zrychlení  $\varepsilon(t)$ . Úhlové zrychlení v čase  $t$  je zpožděno o čas  $\tau(t)$ ,

který odpovídá polovině času potřebného ke změření úhlového zrychlení v čase  $t$ . Hledáme tedy transformaci  $\varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon(t - \tau(t))$ . Z časového průběhu úhlu a úhlové rychlosti můžeme složit průběh úhlové rychlosti v závislosti na úhlu pootočení  $\omega^\varphi(\varphi) = \omega^\varphi(\varphi(t)) = \omega(\varphi^{-1}(t))$ , přičemž předpokládáme úhel rozbalený, tedy prostou funkci. Pro názornost jsme odlišili označení úhlové rychlosti jako funkce úhlu pootočení jako  $\omega^\varphi$  od úhlové rychlosti jako funkce času  $\omega$ . Pak časové fázové zpoždění v daný čas můžeme určit jako

$$\tau(t) = \int_{\varphi(t) - (2\Delta\varphi + k\phi)/2}^{\varphi(t)} \frac{1}{\omega^\varphi(\phi)} d\phi. \quad (35)$$

Tuto spojitou formu transformace převedeme do diskrétní podoby. Při transformaci  $t_i \rightarrow \hat{t}_i = t_i - \tau(t_i)$  obvykle nebude hodnota  $\hat{t}_i$  odpovídat žádnému vzorku dat, ale bude pouze ležet někde mezi vzorky  $t_j \leq \hat{t}_i \leq t_{j+1}$ . Transformovanou hodnotu zrychlení bude tedy vhodnější určit jako alespoň lineární interpolaci sousedních naměřených hodnot úhlového zrychlení, tedy

$$\varepsilon(\hat{t}_i) = \varepsilon(t_j) + \frac{\varepsilon(t_{j+1}) - \varepsilon(t_j)}{t_{j+1} - t_j} (\hat{t}_i - t_j). \quad (36)$$

Určitý integrál bude také nahrazen konečným součtem. Provedeme substituci a úhlovou proměnnou nahradíme časovou proměnnou, součet provedeme přes tolik časových vzorků, abychom pokryli daný úhlový interval integrálu, celkem tedy

$$\tau(t_i) = \sum_{j=0}^{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-j}) \leq (2\Delta\varphi + k\phi)/2} \frac{\varphi(t_{i-j}) - \varphi(t_{i-j-1})}{\omega(t_{i-j})}. \quad (37)$$

Transformací naměřeného souboru hodnot  $\{t_i, \varepsilon_i\}$  tedy získáme novou posloupnost hodnot  $\{t_i, \varepsilon(t_i - \tau(t_i))\}$  podle vztahů (36) a (37). Tento postup je zcela platný, pro praktické použití je ovšem pravděpodobně nadbytečně komplikovaný.

## ■ 4.4 Použitý algoritmus optimalizace nastavení

Představený teoretický rozbor byl použit k implementaci algoritmu automatického nastavení zařízení DMU na základě zadaných rozsahů měřených veličin nebo na základě pokusného měření. Je-li k dispozici pokusné měření, je možné z něj automaticky zjistit následující parametry:

*Počet pulsů snímače na otáčku* - za předpokladu rotace stále stejným směrem je možné spočítat počet pulsů, resp. hran signálů A a B enkodéru mezi dvěma nulovými pulsy. Tento parametr je možné zařízením DMU od verze 4.13 změřit.

*Smysl otáčení* - předpokládá se pro měření např. kladný smysl otáčení, pokud je měřená úhlová rychlost dlouhodobě záporná, je z toho usuzováno na opačný smysl otáčení. Zařízení DMU pak interně smysl otáčení invertuje.

*Možný stupeň interpolace* - za předpokladu rotace stále stejným směrem je určen počet pulsů enkodéru na otáčku bez použití interpolace. Pak je zapnuta osminásobná interpolace a je znovu detekován počet pulsů enkodéru na otáčku. Pokud se určený počet pulsů změnil (osminásobně), pak je usouzeno, že interpolace s použitým snímačem a vstupním zesilovačem je možná.

*Detekce rozsahů měřených veličin úhlu, úhlové rychlosti a úhlového zrychlení* - v případě, že použitá varianta zařízení DMU obsahuje možnost přímého kontinuálního sběru dat, jsou sbírána a vyhodnocována data tak dlouho, dokud se maximální a minimální hodnota měřené veličiny neustálí. Na závěr je měřený rozsah pro jistotu vhodným způsobem zvětšen. Pokud je možný sběr pouze okamžitých hodnot s nízkou vzorkovací frekvencí, je iterativně zvětšován a zmenšován rozsah měřené veličiny. Současně je testován příznak výskytu přetečení, který zařízení DMU generuje. Dojde-li k přetečení, je rozsah vhodným způsobem rozšiřován, nedochází-li k přetečení, je proveden pokus měřicí rozsah zmenšit.

Jsou-li již k dispozici platné hodnoty počtu pulsů snímače na otáčku, rozsahy měřených veličin a možnost interpolace signálu, je možné automaticky nastavit většinu parametrů zařízení DMU

#### ■ 4.4.1 Algoritmus optimálního nastavení měření úhlu

Za účelem co nejjemnějšího rozlišení úhlu je nejprve nastavena nejlepší možná interpolace podle vztahu (7), pokud je vůbec interpolace možná. Faktor 16 – ti násobné interpolace není vzhledem k vysoké chybovosti použit.

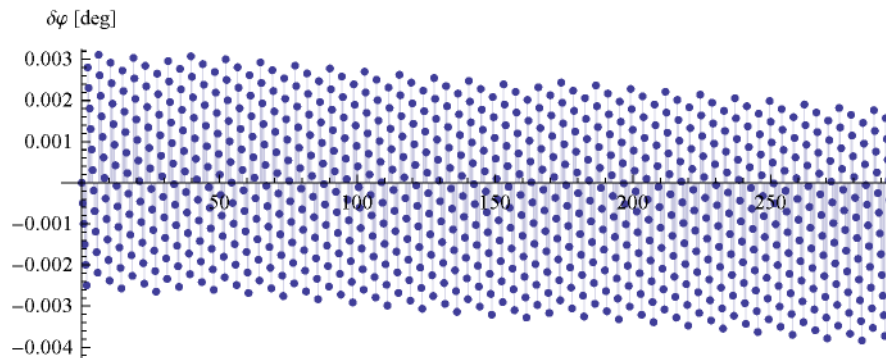
Pro takto získaný počet pulsů snímače na otáčku je podle vztahu (9) rozšířen rozsah měřeného úhlu na nejbližší větší tak, aby nedocházelo k zaokrouhlování při interní interpretaci měřeného úhlu celým číslem. Protože při rozšiřování rozsahu je vhodné získaný rozsah navíc využít pro případné přetečení signálu mimo předem odhadnuté meze, je tento signál rozšířen oběma směry na

$$\left\langle \varphi_{\min} - \left\lfloor \Delta\varphi (2^b - 1) / 10 \right\rfloor, \right. \\ \left. \varphi_{\min} - \left\lfloor \Delta\varphi (2^b - 1) / 10 \right\rfloor + \Delta\varphi (2^b - 1) \right\rangle. \quad (38)$$

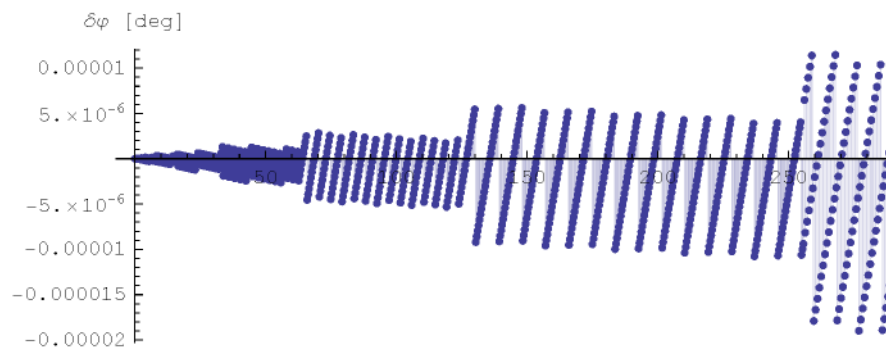
Zaokrouhlení je provedeno tak, aby dolní mez rozsahu bylo celé číslo.

Obrázek 3 zakresluje průběh odchylky naměřeného úhlu pootočení a skutečného úhlu pootočení. Záznam byl proveden v závislosti na úhlu pootočení, tzn. pouze vyneseny do grafu by měl být přesnou přímkou. Jestliže však od takto naměřeného průběhu odečteme tuto teoretickou přímkou procházející prvním a posledním bodem grafu (teoreticky skutečný úhel pootočení), získáme uvedený graf. Ve skutečnosti zobrazuje zaokrouhlovací chyby způsobené celočíselnou reprezentací naměřených hodnot. Pro měření úhlu byl totiž nastaven rozsah  $-10 \div 370^\circ$ , tzn. úhel byl vnitřně celočíselně reprezentován s krokem  $\Delta\varphi_1 = 380^\circ / 65535 \div 0.005798^\circ$ . Přitom úhel byl měřen snímačem s 1000 pulsy na otáčku, tedy s krokem  $\Delta\varphi_2 = 0.09^\circ$ . Graf tedy odpovídá funkci  $\text{Round}\left(\frac{k \Delta\varphi_2}{\Delta\varphi_1}\right) \Delta\varphi_1$ . Maximální možná chyba  $\Delta\varphi_1$  je v grafu patrná jako vzdálenost horní a dolní obálky dat. Takovýto průběh chyby úhlu již způsobuje nemalý šum např. při výpočtu úhlové rychlosti derivací naměřeného úhlu.

Naproti tomu obrázek 4 znázorňuje stejný průběh jako na obrázku 3, ale z měření s optimalizovaným rozsahem měření úhlu podle vztahu (38). Je patrné, že chyba je menší o 2 řády. Systematický průběh chyby znázorňuje zaokrouhlovací chyby čísel reprezentovaných s plovoucí desetinnou čárkou v jednoduché přesnosti (single, float). Tuto chybu by bylo možné významně redukovat použitím dvojité přesnosti v reprezentaci čísel s plovoucí desetinnou čárkou. I v tomto případě je však přesnost naměřených dat plně dostačující.



Obr. 3: Rozdíl naměřeného úhlu pootočení  $\varphi$  a skutečného úhlu pootočení zaznamenaný v závislosti na úhlu pootočení  $\varphi$  pro standardní nastavený rozsah měření úhlu  $-10 \div 370^\circ$  se snímačem s 1000 pulsy na otáčku. Systematické odchylky od nulové hodnoty jsou zaokrouhlovací chyby způsobené celočíselnou reprezentací naměřených hodnot.



Obr. 4: Rozdíl naměřeného úhlu pootočení  $\varphi$  a skutečného úhlu pootočení zaznamenaný v závislosti na úhlu pootočení  $\varphi$  pro optimalizovaný nastavený rozsah měření úhlu  $-11 \div 388,20999^\circ$  se snímačem s 1000 pulsy na otáčku. Rostoucí systematické odchylky od nulové hodnoty jsou chyby způsobené omezeným bitovým rozsahem mantisy čísel reprezentovaných plovoucí desetinnou čárkou s jednoduchou přesností.

#### ■ 4.4.2 Algoritmus optimálního nastavení měření úhlové rychlosti

Zásadním parametrem ovlivňujícím výpočet úhlové rychlosti je počet pulsů  $i_\omega$ , přes které je úhlová rychlost měřena. Ten je možné nastavovat buď dynamicky, nebo na pevnou hodnotu. Dynamické nastavení bude použito, pokud úhlová rychlost obsahuje nulovou hodnotu (buď se během pohybu mění smysl, nebo je očekáváno měření rozběhu od nulové rychlosti), nebo pokud dolní limit úhlové rychlosti je v absolutní hodnotě menší než čtvrtina absolutní hodnoty horního limitu úhlové rychlosti. Pak podle tabulky 1 může dojít k přepnutí parametru  $i_\omega$  během měření.



Nechť úhlová rychlost má být měřena v rozsahu  $\langle \omega_{\min}, \omega_{\max} \rangle$ , přičemž jednotlivé meze mohou mít odlišná znaménka, mohou být obě nezáporná či obě nekladná. Určíme horní absolutní limit úhlové rychlosti jako  $\omega_{\text{abs}} = \text{Max}(|\omega_{\min}|, |\omega_{\max}|)$ . Horní povolenou hodnotu parametru  $i_{\omega}$  při automatickém přepínání během měření určíme ze vztahu (18) použitím rozsahu úhlové rychlosti  $\langle \omega_{\text{abs}}/4, \omega_{\text{abs}} \rangle$ , nejvýše však tak, aby bylo zachováno alespoň 90 hodnot úhlové rychlosti na otáčku (tedy  $i_{\omega} \leq p/90$ ), a nejvýše 63, což je horní mez tohoto parametru v přístroji DMU aktuální verze. Vzhledem k nedostatečnému účinku metody implementované v zařízení DMU v aktuálních verzích (viz tabulka 2) je vhodné vždy zvolit parametr dynamiky  $d$  co nejvyšší, tedy 8 a parametr hystereze  $h = 1$ .

Pokud nebude použit algoritmus dynamické změny parametru  $i_{\omega}$ , tedy úhlová rychlost nemění znaménko a je dostatečně vzdálená od nulové hodnoty, bude podle vztahu (18) vypočten pevný parametr  $i_{\omega}$ , nejvýše však takový, aby bylo zachováno alespoň 90 hodnot úhlové rychlosti na otáčku, tedy  $i_{\omega} \leq p/90$ . Rozlišení v tomto případě bude také zvýšeno použitím 4 paralelních čítačů času fázově posunutých o jednu hranu signálů A a B enkodéru. Z časů naměřených čtyřmi čítači se vypočte průměrná hodnota, která se použije pro výpočet úhlové rychlosti podle vztahu (2).

#### ■ 4.4.3 Algoritmus optimálního nastavení měření úhlového zrychlení

Pro úhlové zrychlení není implementován v zařízení DMU žádný algoritmus dynamické změny parametru  $i_{\varepsilon}$  udávajícího počet pulsů, přes které se úhlové zrychlení měří. Je opět určen absolutní limit úhlové rychlosti  $\omega_{\text{abs}} = \text{Max}(|\omega_{\min}|, |\omega_{\max}|)$ . Parametr  $i_{\varepsilon}$  je vypočten na základě vztahu (33) pro úhlovou rychlost v rozsahu  $\langle \omega_{\text{abs}}/4, \omega_{\text{abs}} \rangle$  a opět je omezen tak, aby bylo realizováno alespoň 45 hodnot úhlového zrychlení na otáčku, tedy  $2 i_{\varepsilon} \leq p/45$ .

## 5. Analýza chyb měření s enkodéry

Měření s enkodéry podléhá mnoha různým zdrojům chyb. V předchozím textu byly analyzovány jednotlivé chyby vlastní měřicí metody. V následujícím textu se pokusíme alespoň v krátkosti představit a okomentovat význam dalších možných chyb.

### ■ 5.1 Chyba vlivem nepřesné délky pulsů enkodérů

V dosavadním textu jsme předpokládali dokonale přesně vyrobené inkrementální snímače se vzdáleností jednotlivých pulsů přesně shodnými a rovnými úhlovému intervalu  $\Delta\varphi$ . Uvažujme nyní nepřesně vyrobený puls délky  $\Delta\varphi + \delta_p = (1 + q)\Delta\varphi$ . (Nechť následující puls pak má délku  $\Delta\varphi - \delta_p = (1 - q)\Delta\varphi$ .) Přesně naměřená úhlová rychlost by byla rovna  $\omega = \Delta\varphi / \Delta t$ . Předpokládejme, že v celém úhlovém intervalu se úhlová rychlost mění s konstantním úhlovým zrychlením  $\varepsilon$ . Vlivem nepřesného úhlového intervalu je naměřena úhlová rychlost  $\hat{\omega} = \Delta\varphi / (\Delta t + \delta t)$ , kde časová odchylka  $\delta t = \delta_p / \omega'$ ,  $\omega' = \omega + \varepsilon \Delta t / 2$  je úhlová rychlost dosažená na konci úhlového intervalu  $\Delta\varphi$ , kde dochází k zmíněné časové odchylce. Určeme chybu výpočtu úhlové rychlosti  $\delta_{p\omega} = \omega - \hat{\omega}$

$$\begin{aligned} \delta_{p\omega} &= \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} - \frac{\Delta\varphi}{\Delta t + \delta t} = \\ &= \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \frac{\delta_p}{\omega'} \frac{1}{\Delta t + \frac{\delta_p}{\omega'}} = \frac{\delta_p \omega}{\omega' \Delta t + \delta_p} = \frac{\delta_p}{\Delta\varphi + \delta_p + \varepsilon \Delta t / 2} \omega. \end{aligned} \quad (39)$$

V případě konstantní úhlové rychlosti  $\omega$  v celém úhlovém intervalu  $\Delta\varphi$ , tedy pro nulové úhlové zrychlení  $\varepsilon$ , se vztah (39) redukuje a získáme relativní chybu úhlové rychlosti rovnou  $\frac{q}{1+q}$ . Pro relativní chyby šířky pulsů snímače  $q$  menší než 0.1%, což je obvyklé, je tato relativní chyba úhlové rychlosti přibližně rovna  $q$ . Pokud je chybný pouze jeden puls a v následujícím pulsu je chyba šířky pulsu korigována, bude následující chyba úhlové rychlosti co do velikosti shodná a bude působit v opačném směru. Přírůstek nejistoty měření vlivem nepřesné velikosti pulsu inkrementálního snímače je tedy  $q\omega$ .

Nyní se zaměříme na podobnou analýzu pro úhlové zrychlení. Přesně naměřené úhlové zrychlení by bylo rovno  $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_2) / (\Delta t_1 + \Delta t_2)$ . Určíme

naměřené úhlové zrychlení mezi těmito dvěma pulsy. Předpokládejme, že v celém úhlovém intervalu je úhlové zrychlení  $\varepsilon$  konstantní. Pak je okamžitá úhlová rychlost v okamžiku výskytu chybně umístěného pulsu přibližně  $\omega' = (\omega_1 + \omega_2) / 2$ . Rozdíl skutečného a chybně naměřeného úhlového zrychlení je

$$\varepsilon - \hat{\varepsilon} = \frac{\frac{\Delta\varphi}{\Delta t_1} - \frac{\Delta\varphi}{\Delta t_2}}{\Delta t_1 + \Delta t_2} - \frac{\frac{\Delta\varphi}{\Delta t_1 - \frac{\delta_p}{\omega'}} - \frac{\Delta\varphi}{\Delta t_2 + \frac{\delta_p}{\omega'}}}{\Delta t_1 + \Delta t_2} =$$

$$\frac{+\delta_p}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \left( \frac{\omega_1}{\omega' \Delta t_1 - \delta_p} + \frac{\omega_2}{\omega' \Delta t_2 - \delta_p} \right). \quad (40)$$

Úhlovou rychlost  $\omega_2$  vyjádříme pomocí naměřeného úhlového zrychlení  $\varepsilon$  a dosadíme za  $\omega'$

$$\varepsilon - \hat{\varepsilon} =$$

$$\frac{1}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \frac{\delta_p}{\Delta\varphi^2 - \delta_p^2} (2\omega_1 \delta_p + \varepsilon(\Delta\varphi - \delta_p)(\Delta t_1 + \Delta t_2)) =$$

$$\varepsilon \frac{q}{1+q} + 2 \frac{\omega_1}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \frac{q^2}{1-q^2}. \quad (41)$$

Výraz  $\frac{q^2}{1-q^2}$  se pro malé hodnoty relativní chyby  $q$  chová přibližně jako  $q^2$ , reálně je tedy velmi malý. Celý druhý člen výrazu lze tedy pro běžné poměry úhlové rychlosti  $\omega$  a úhlového zrychlení  $\varepsilon$  zanedbat. Relativní chyba úhlového zrychlení je tedy opět přibližně rovna  $q$ .

Závěrem je tedy možné shrnout, že při měření úhlové rychlosti a zrychlení přes celý počet pulsů enkodéru je relativní chyba měření přibližně shodná s relativní chybou velikosti pulsů enkodéru. S kvalitními snímači např. firmy Heidenhain je tedy reálně zanedbatelná až neměřitelná, neboť se vyhodnocuje naráz celé pole rysek, čímž se chyby jednotlivých rysek výrazně redukuje. Při reálných testech starších typů snímačů byla naměřena chyba menší než 0.1%.

Chybu je ovšem možné velmi dobře sledovat při měření úhlové rychlosti přes méně než 1 puls snímače, např. mezi každou následující hranou pulsů A a B. Vzájemný posuv signálů A a B je totiž mnohem méně přesný než perioda pulsů. Ještě k významnějším chybám dochází měřením rychlosti a zrychlení přes necelý počet pulsů s použitím interpolátorů. Zařízení DMU proto tuto variantu při použití vestavěného interpolátoru vůbec neumožňuje.

## ■ 5.2 Chyba vzniklá nepřesným měření času použitého pro výpočet rychlosti a zrychlení

Zařízení DMU měří čas pomocí čítačů v programovatelném hradlovém poli se vzorkovací frekvencí 100 MHz. Taktovací frekvence hradlového pole je určena použitým krystalem a nemusí být zcela přesná. V případě použití levného krystalu může být navíc i částečně teplotně závislá. Krystaly také stářím ztrácí svou přesnost. V přístrojích DMU jsou krystaly s přesností 50 ppm při teplotách -20 až 70 °C stárnoucí nejvýše o 5 ppm/rok.

## ■ 5.3 Chyba vlivem reálných vlastností propojovacích kabelů

Reálné kabely propojující enkodéry se zařízením DMU mají nenulovou měrnou kapacitu a indukčnost. To způsobuje zkreslení hran pulsů jdoucích z enkodéru, a tedy také ovlivňuje výskyt události na trigerovacím hradle vyhodnocovací jednotky v DMU. Tento jev je navíc frekvenčně závislý, dopravní zpoždění pulsu na kabelu je tedy závislé na aktuální úhlové rychlosti. Z toho důvodu je vhodné používat kvalitní stíněné kabely s co nejnižší měrnou indukčností a kapacitou a co nejkratších délek. Ve starších verzích přístroje DMU (verze 3) byl problém řešen vyhodnocením pulsů z enkodéru v modulu vstupních zesilovačů umístěných velmi blízko u vlastního snímače. Toto řešení však bylo nákladnější, komplikovanější a především každý modul vstupních zesilovačů musel obsahovat vlastní krystal taktující zpracování signálů. Tyto krystaly i při pečlivé volbě měly mírně odlišné parametry, což způsobovalo systematickou chybu při měření diferenciálních úhlových rychlostí.

Velikost této nejistoty měření je obtížné obecně určit. Pro běžné levné LPT kabely krátkých délek (cca do 10m) nedochází k žádnému významnému přetvarování pulsů enkodéru. Pro větší délky jsou používány kvalitní stíněné kabely tak, aby vzniklá chyba neměla významný vliv na měřený signál. Obecně je možné konstatovat, že při volbě vhodného kabelu délky do 40 m a při běžných frekvencích pulsů do 15 kHz není chyba větší než 0.1%.

## ■ 5.4 Torzní kmity snímačů

V závislosti na použitém typu snímače je možné detekovat torzní kmity hřídele snímače (pro snímače s hřídelí) nebo torzní kmity statoru snímače (pro snímače s dutým hřídelem, které mají rotor pevně přichycen k měřené hřídeli a stator uchycen pružně). Po vybuzení např. rázem na měřené hřídeli mohou být i relativně významné. Jejich velikost závisí především na tlumení v použitém snímači, torzní tuhosti použité spojky, resp. uchycení snímače, a velikosti budícího rázu. Torzní kmity v úhlu jsou obvykle nejvýše na hranici kvantovací chyby měření úhlu (nejvyšší naměřené torzní kmity z naší praxe měly amplitudu  $0.02^\circ$ ). Torzní kmity se však mohou významně projevit při měření úhlové rychlosti a zrychlení. Nejvyšší naměřené torzní kmity v záznamu úhlové rychlosti kolísaly v rozsahu  $390 \div 710$  RPM s frekvencí přibližně 1 kHz. Úhlové zrychlení přesáhlo velikost  $240\,000 \text{ rad/s}^2$ .

Pro posouzení vlivu tlumení můžeme analyzovat jednoduchý model torzních kmitů snímačů s hřídelí připevněných pomocí homokinetické spojky k měřené hřídeli. Použijeme model torzních kmitů s Coulombovským třením

$$I \ddot{\varphi} + I_R \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|} + k \varphi = M, \quad (42)$$

kde  $I$  je moment setrvačnosti použitého enkodéru spolu s přírubou homokinetické spojky k němu připojené,  $k$  je torzní tuhost homokinetické spojky a  $I_R$  je třecí moment. Je zanedbána tuhost hřídele enkodéru a předpokládáme připojení k měřené hřídeli, která má velmi vysoký moment setrvačnosti. Model platí i pro posouzení relativních torzních kmitů  $\varphi$  superponovaných na hřídel rotující konstantní úhlovou rychlostí. Pro posouzení byly zvoleny dva enkodéry s parametry podle tabulky 3.

Enkodér	1	2
Typ	Heidenhain ROD 424	Heidenhain ROD 1080
Moment setrvačnosti $I_1$	$0.17 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$	$0.45 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$
Poloměr hřídele $r$	2 mm	2 mm
Třecí moment $I_R$	0.000124 Nm	0.000206 Nm

Tabulka 3: Parametry analyzovaných snímačů

S oběma snímači byla použita vlnovcová homokinetická spojka firmy Larm s momentem setrvačnosti jedné příruby  $I_2 = 0.28 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$  a torzní tuhostí

$k = 200 \text{ Nm/rad}$ . Celkový moment setrvačnosti enkodéru a homokinetické spojky je tedy  $I = I_1 + I_2$ .

Rovnici (42) je možné řešit analyticky při hledání harmonického řešení  $\varphi$  a harmonického buzení  $M$  ve tvaru

$$\begin{aligned}\varphi(t, \Omega) &= \varphi_0(\Omega) e^{i \Omega t}, \quad \dot{\varphi} = i \varphi_0 \Omega e^{i \Omega t}, \\ \ddot{\varphi} &= -\varphi_0 \Omega^2 e^{i \Omega t}, \quad M(t, \Omega) = M_0 e^{i \Omega t},\end{aligned}\quad (43)$$

kde  $\Omega / (2\pi)$  je analyzovaná frekvence a  $\varphi_0$ ,  $M_0$  jsou obecně komplexní čísla. Dosazením do rovnice (42) lze vyjádřit

$$\varphi_0(\Omega) = \frac{M_0 |\Omega| \pm I_R}{|\Omega| (k - I \Omega^2)}. \quad (44)$$

Torzní kmitý jsou buzeny buď rázem na měřené hřídeli nebo nerovnoměrnou úhlovou rychlostí měřené hřídele. V obou případech potřebujeme tedy rovnici (42) řešit s kinematickým buzením, tedy s okrajovými podmínkami  $|\varphi(0)| = \hat{\varphi}_0$ ,  $|\dot{\varphi}(0)| = \hat{\omega}_0$ , kde  $\hat{\varphi}_0$  je počáteční úhel a  $\hat{\omega}_0$  je počáteční úhlová rychlost. Rozepíšeme-li okrajové podmínky podle Eulerových vzorců, získáme

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(0) &= \\ \hat{\omega}_0 (\text{Cos } \overline{\omega_0} + i \text{Sin } \overline{\omega_0}) &= i \varphi_0(\Omega) \Omega = \Omega \hat{\varphi}_0 (i \text{Cos } \overline{\varphi_0} - \text{Sin } \overline{\varphi_0}),\end{aligned}\quad (45)$$

kde pruhem byly označeny argumenty komplexního čísla. Odtud přímo získáme vztah mezi počátečním úhlem a úhlovou rychlostí

$$\hat{\varphi}_0 = \hat{\omega}_0 / \Omega, \quad \overline{\omega_0} = \overline{\varphi_0} + \pi / 2. \quad (46)$$

Rozepíšeme počáteční budící moment podle Eulerova vzorce jako  $M_0 = \hat{M}_0 (\text{Cos } \overline{M_0} + i \text{Sin } \overline{M_0})$ . Dosadíme (46) do (44) a porovnáním s počátečními podmínkami pro reálnou a imaginární složku získáme soustavu rovnic vyjadřující vztah mezi kinematickým a momentovým buzením

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_0 (k - I \Omega^2) \text{Sin } \overline{\varphi_0} &= \hat{M}_0 \text{Sin } \overline{M_0}, \\ \hat{\varphi}_0 (k - I \Omega^2) \text{Cos } \overline{\varphi_0} \pm \frac{I_R}{|\Omega|} &= \hat{M}_0 \text{Cos } \overline{M_0}.\end{aligned}\quad (47)$$

Sloučením druhých mocnin obou rovnic a použitím vztahu  $\text{Cos}^2(x) + \text{Sin}^2(x) = 1$  získáme amplitudu budícího momentu  $\hat{M}_0$ , kterou pak dosadíme do první rovnice a získáme fázi  $\overline{M_0}$ . Souhrnně tedy pro vybuzení pootočením z úhlové polohy  $\hat{\varphi}_0$  počáteční úhlovou rychlostí  $\hat{\omega}_0$  získáme pro frekvenci  $\Omega$  následující řešení:

$$\begin{aligned}\hat{M}_0 &= \sqrt{\hat{\varphi}_0^2(k - I\Omega^2)^2 \mp 2\hat{\varphi}_0(k - I\Omega^2) \frac{I_R}{|\Omega|} \cos \overline{\varphi}_0 + \frac{I_R^2}{|\Omega|^2}}, \\ \overline{M}_0 &= \text{ArcSin} \frac{\hat{\varphi}_0(k - I\Omega^2) \sin \overline{\varphi}_0}{\hat{M}_0}.\end{aligned}\quad (48)$$

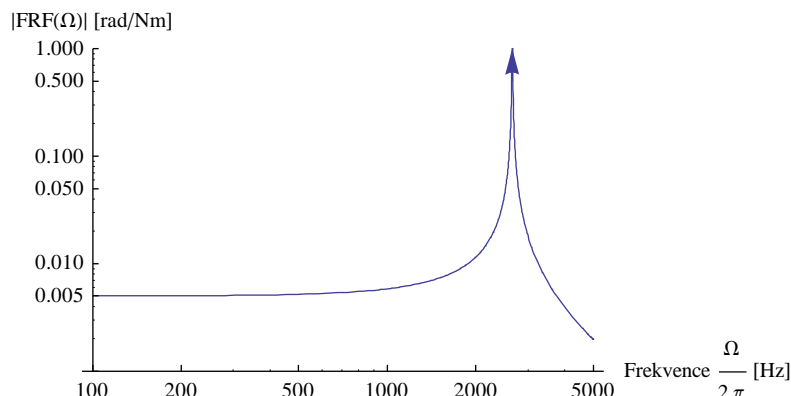
Pro tyto parametry můžeme analyzovat přenosovou funkci systému  $\text{FRF}(\Omega) = \varphi_0(\Omega) / M_0(\Omega)$ . Amplituda přenosové funkce je

$$|\text{FRF}(\Omega)| = \frac{\hat{\varphi}_0}{\sqrt{\hat{\varphi}_0^2(k - I\Omega^2)^2 \mp 2\hat{\varphi}_0(k - I\Omega^2) \frac{I_R}{|\Omega|} \cos \overline{\varphi}_0 + \frac{I_R^2}{|\Omega|^2}}}.\quad (49)$$

Pro zadané parametry (malý třecí moment  $I_R$ ) a běžné hodnoty počátečních podmínek  $\varphi_0$  a  $\omega_0$  je možné parametr  $I_R$  zanedbat, což je možné rychle ukázat rozvojem (49) podle parametru  $I_R$  v okolí jeho nulové hodnoty do Taylorovy řady. Třecí moment neovlivňuje rezonanční frekvenci, ovlivňuje však maximální amplitudu získané přenosové funkce na rezonanční frekvenci. Nízký třecí moment u testovaných snímačů maximální amplitudu tlumí nedostatečně. Výhodou však je, že kritické pásmo je díky nízkému tlumení poměrně úzké a na nižších frekvencích ovlivňuje amplitudy měřených kmitů minimálně. Pro nulový třecí moment  $I_R$  se vztah zjednodušuje na

$$|\text{FRF}(\Omega)| = \frac{1}{k - I\Omega^2},\quad (50)$$

což odpovídá rezonanční frekvenci  $f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/I}$ . Amplituda přenosové funkce v tomto případě nezávisí na počátečních podmínkách  $\varphi_0$  a  $\omega_0$ . Průběh amplitudy přenosové funkce pro tento případ je znázorněn pro snímač 2 na obrázku 5



*Obr. 5: Přenosová funkce torzních kmitů bez vlivu tlumení třením (podle vztahu (50)) pro snímač 2. Amplituda v okolí rezonanční frekvence inklinuje k nekonečné hodnotě.*

Rezananční frekvence z uvedených vztahů jsou pro enkodér 1  $f_r = 3400$  Hz a pro enkodér 2 frekvence  $f_r = 2656$  Hz.

Závěrem je tedy možné formulovat doporučení používat enkodéry a homokinetické spojky zajišťující co nejvyšší rezonanční frekvenci, tedy enkodéry s co nejmenším momentem setrvačnosti (hřídel s co nejmenším poloměrem) a homokinetické spojky s vyšší torzní tuhostí (přitom však takovou, aby nebyla příliš namáhána jemná ložiska použitých enkodérů vlivem nedokonalého spojení s měřenou hřídelí). Nabídka homokinetických spojek na trhu však není příliš rozsáhlá.

Pokud je frekvenční obsah měřené úhlové rychlosti a zrychlení dostatečně menší než vlastní frekvence torzních kmitů snímače, je možné vlastní kmity eliminovat vhodným nastavením počtu pulsů, přes které se rychlost a zrychlení měří. Měření přes určitý počet pulsů odpovídá vlastně měření střední hodnoty rychlosti, resp. zrychlení v daném úhlovém intervalu. V postprocessingu je možné vlastní kmity také velmi dobře filtrovat např. nekauzálními klouzavými průměry (s nulovým fázovým posuvem) přes vhodný počet bodů. Je-li  $f_{vz}$  vzorkovací frekvence, se kterou byla data pořízena, buď  $n = \lfloor f_{vz} / f_r / 2 \rfloor * 2 + 1$ , postačí obvykle nekauzální klouzavé průměry postupně přes  $n - 2$ ,  $n$  a  $n + 2$  bodů.

Při použití enkodérů s dutým hřídelem se projevují podobné efekty. Na výši rezonanční frekvence se místo homokinetické spojky podílí torzní tuhost upevnění statoru snímače k měřenému stroji a relativně vysoký moment setrvačnosti statoru.



## ■ 5.5 Nesouosé umístění snímačů vůči měřené hřídeli

Přesné souosé umístění snímače vůči měřené hřídeli je velmi obtížné. Spojení hřídele snímače s měřenou hřídelí je možné např. použitím homokinetické spojky. Ve skutečnosti však tyto spojky nikdy nejsou dokonale homokinetické. Na měřené rychlosti je tedy nasuperponována relativní rychlost mezi měřenou hřídelí a hřídelí enkodéru. Ve spektru se obvykle objevuje jako jedna nebo i více harmonických složek s dominantní první nebo druhou harmonickou složkou. Detailní analýza vlivu nesouososti je komplikovaná a přesahuje rozsah této práce. Zjednodušené řešení pro malé hodnoty nesouososti pomocí Laplaceovy transformace je možné nalézt např. v lit. [23].

Chyba vlivem nesouososti může být i poměrně významná. Vhodné montáži snímače je tedy nutné věnovat patřičnou pozornost. Chybu je možné redukovat použitím snímačů montovaných přímo na měřenou hřídel, které jsou ovšem dražší, nejsou tak široce použitelné a vyvolávají problémy s torzně tuhým, ale lineárně poddajným uchycením statoru snímače. Při měření relativních torzních kmitů (mezi konci hřídele) je někdy možno chybu změřit staticky (protáčením při nízkých úhlových rychlostech) a odečíst ji od dynamických měření.

## ■ 5.6 Nedokonalé uložení měřené hřídele

Nezřídka probíhá měření na opotřeбенém stroji. Ložiska, ve kterých je umístěna měřená hřídel, mohou mít značné vůle. Měřená hřídel pak neprovádí dokonalý rotační pohyb, ale obecně i velmi komplikovaný precesní pohyb. Tento pohyb způsobuje proměnnou nesouosost spojení enkodéru a měřené hřídele, v některých případech může velmi významně namáhat homokinetickou spojku až k její destrukci. Proměnné nesouosé uložení způsobuje superpozici obecně komplikovaného průběhu relativní rychlosti mezi měřenou hřídelí a hřídelí enkodéru na průběh měřené úhlové rychlosti. Tyto chyby je velmi obtížné odstranit. Je možné je redukovat použitím homokinetické spojky s nižší torzní tuhostí nebo dvou spojek s vloženou hřídelí, ovšem za cenu snížení rezonanční frekvence torzních kmitů snímače, jak bylo popsáno výše.

## ■ 5.7 Chyba vzorkování v závislosti na úhlu pootočení vlivem torzních kmitů enkodéru

Dochází-li k ovlivnění měřené úhlové rychlosti např. torzními kmity enkodéru, ovlivňuje to při sběru dat v závislosti na úhlu pootočení okamžik, kdy jsou pořízena data dalších měřených veličin (síly, zrychlení...). Zatímco se předpokládá sběr dat v okamžicích rovnoměrně rozmístěných úhlových poloh měřené hřídele, sběr dat je proveden v rovnoměrně rozmístěných úhlových pozicích torzně kmitající hřídele enkodéru. Velikost této chyby můžeme přibližně určit. Předpokládejme, že skutečná úhlová rychlost  $\omega_i$  v okamžiku  $t_i$  v úhlové pozici  $\varphi_i$  (na měřené hřídeli) je naměřena jako úhlová rychlost  $\hat{\omega}_i = \omega_i + \delta\omega_i$ . Úhlová rychlost  $\hat{\omega}_i$  je realizována na měřicím enkodéru při úhlové poloze  $\hat{\varphi}_i = \varphi_i + \delta\varphi_i$ , přirozeně ve stejný časový okamžik  $t_i$ . Dále předpokládejme rovnoměrné úhlové vzorkování (na enkodéru) s velikostí vzorkovacího kroku  $\Delta\varphi$ , tedy  $\hat{\varphi}_i = i \Delta\varphi$ . Potom časový okamžik vzorkování  $t_i$  lze určit buď z úhlové pozice  $\varphi_i$  na měřené hřídeli nebo z úhlové pozice  $\hat{\varphi}_i$  na enkodéru

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_{i-1} + (t_i - t_{i-1}) \omega_i \\ \hat{\varphi}_i &= \hat{\varphi}_{i-1} + (t_i - t_{i-1}) \hat{\omega}_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi_i = \varphi_{i-1} + \Delta\varphi \frac{\omega_i}{\hat{\omega}_i}. \quad (51)$$

Určili jsme tedy nerovnoměrné úhlové vzorkování na měřené hřídeli. Úhlovou rychlost  $\omega_i$  můžeme získat z naměřené úhlové rychlosti  $\hat{\omega}_i$  např. filtrací v rezonančním pásmu. Chyba vzorkování je tedy dána rozdílem  $\delta\varphi_i = \hat{\varphi}_i - \varphi_i$ .

Tato chyba se může nepříznivě projevit především při transformaci (chybně) úhlově vzorkovaných dat na časově vzorkovaná data, např. podle algoritmu, který bude představen v kapitole o numerické transformaci. K transformaci je použita úhlová rychlost. Ze vztahů mezi úhlovu a časovou doménou uvedených v (51) vyplývá, že transformací úhlové základny enkodéru dané úhly  $\hat{\varphi}_i$  pomocí úhlové rychlosti naměřené na enkodéru  $\hat{\omega}_i$  bychom měli získat stejnou časovou základnu jako transformací úhlové základny měřené hřídele dané úhly  $\varphi_i$  pomocí filtrované úhlové rychlosti  $\omega_i$ . Praktické zkušenosti ovšem ukazují, že tomu tak není. symbolická analýza je značně komplikovaná, budeme tedy problematiku ilustrovat na numerických testech pro nejhorší možné případy.

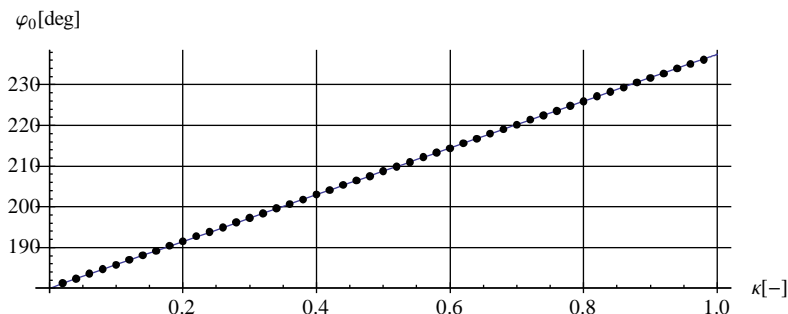
Pro jednoduchost necht' je úhlová rychlost měřené hřídele konstantní a rovná  $\omega_0$  [RPM] a úhlová rychlost na enkodéru obsahuje navíc torzní kmit v podobě harmonického kolísání v časové proměnné s rezonanční frekvencí. Necht' jsou data vzorkována v závislosti na úhlu pootočení  $p$ -krát za otáčku měřené hřídele.

Uvažujme nejkomplicovanější případ, ve kterém rezonanční frekvence snímače odpovídá dvojnásobku úhlové vzorkovací frekvence, tedy každá perioda torzního kmitu je zachycena právě dvěma vzorky, tedy  $f_r = 2 \times 60 / (\omega_0 p)$  [Hz]. Necht' relativní amplituda torzních kmitů je  $\kappa$ , tzn. úhlová rychlost na enkodéru obsahující torzní kmity je dána vztahem

$$\omega_e(t) = \omega_0(1 + \kappa \sin(2\pi t \omega_0 p / 60 + \varphi_0)), \quad (52)$$

kde  $\varphi_0$  je relativní fáze prvního vzorku úhlového vzorkování. Úhlově rovnoměrné vzorkování na enkodéru narozdíl od očekávaného úhlového vzorkování na měřené hřídeli bude časově nerovnoměrné, protože úhlová rychlost enkodéru není konstantní, ale obsahuje torzní kmity. Pokusíme se vyjádřit tuto nerovnoměrnost časového vzorkování, tedy časovou odchylku od teoretického rovnoměrného vzorkování. Integrací vztahu (52) získáme průběh úhlu pootočení enkodéru  $\varphi_e(t)$  v závislosti na čase. Pokud  $|\kappa| < 1$ , tedy úhlová rychlost na enkodéru nemění znaménko, bude funkce  $\varphi_e(t)$  ryze monotónní, a tedy prostá a existuje její inverzní funkce  $t_e(\varphi)$ . Tato funkce určuje čas potřebný na pootočení hřídele enkodéru do zadané úhlové polohy. Právě tento krok je analyticky značně obtížný a pro účely simulace byl prováděn numericky.

Není na první pohled zřejmé, pro jakou hodnotu počáteční fáze  $\varphi_0$  bude nerovnoměrnost časového vzorkování nejvyšší. Byla tedy provedena simulace hledající maximální rozdíl  $t_e(\varphi + \Delta\varphi) - t_e(\varphi)$  pro různé hodnoty parametru počáteční fáze  $\varphi_0$  a relativní amplitudy torzních kmitů  $\kappa$ . Výsledné hodnoty ukazují přesvědčivou lineární závislost parametru  $\varphi_0$  splňující zmíněné optimalizační kritérium v závislosti na parametru  $\kappa$ , jak ukazuje obrázek 6. Lineární regresí byla z těchto hodnot odhadnuta přibližná funkce  $\varphi_0^{\max}(\kappa) = 180 + 57.43 \kappa$  [deg] tak, aby funkce pro  $\kappa = 0$  procházela hodnotou  $180^\circ$ , pro kterou je přirozeně nerovnoměrnost časového vzorkování nulová.

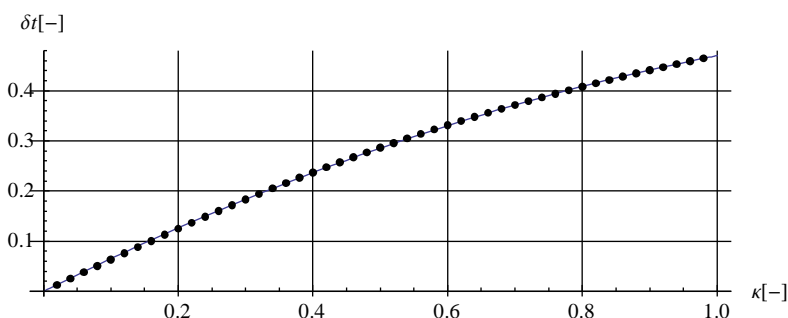


*Obr. 6: Počáteční fáze  $\varphi_0$  v závislosti na relativní amplitudě torzních kmitů  $\kappa$ , pro kterou dochází k maximální časové nerovnoměrnosti úhlového vzorkování. Body znázorňují výsledky simulace, kterými je lineární regresí proložena přímka.*

Současně byla hledána aproximační funkce vyjadřující závislost nalezené maximální časové nerovnoměrnosti  $\delta t$  na relativní amplitudě torzních kmitů  $\kappa$ . Maximální časová nerovnoměrnost  $\delta t$  byla vyjádřena relativně vůči rovnoměrnému vzorkování. Její průběh je velmi přesně kvadratický, jak ukazuje obrázek 7. Vypočtenými hodnotami byla proložena lineární regresí parabola tak, aby pro  $\kappa = 0$  byla též nerovnoměrnost  $\delta t = 0$ . Tím byl získán velmi dobře platný přibližný vztah

$$\delta t(\kappa) = 0.6724 \kappa - 0.2022 \kappa^2. \quad (53)$$

Získané výsledky jsou nezávislé na úhlové rychlosti měřené hřídele  $\omega_0$  a na počtu vzorků úhlového vzorkování na jednu otáčku měřené hřídele.



*Obr. 7: Maximální relativní nerovnoměrnost časového vzorkování  $\delta t$  v závislosti na relativní amplitudě torzních kmitů  $\kappa$ . Body znázorňují výsledky simulace, kterými je lineární regresí proložena parabola.*

Následně byl analyzován vliv nerovnoměrného vzorkování a úhlové rychlosti pro transformaci úhlově vzorkovaných dat na časová. Na základě praktických zkušeností bylo známo, že pro tuto transformaci je vzhledem k numerickým chybám vhodnější úhlová rychlost očištěná od vlivu torzních kmitů než skutečně

naměřená úhlová rychlost. Tento závěr je vzhledem ke konstatování ve vztahu (51) překvapivý. Je způsoben tím, že reálné amplitudy torzních kmitů úhlu pootočení hřídele enkodéru jsou velmi malé a obvykle nejsou vzhledem k úhlovému rozlišení použitého enkodéru v úhlové vzorkovací základně vůbec realizovány. Naproti tomu v úhlové rychlosti jsou relativně významné. Provedeme tedy analýzu, jaké chyby se dopustíme, jestliže pro transformaci použijeme úhlovou rychlost očištěnou od vlivu torzních kmitů enkodéru místo skutečně naměřené.

Nechť analyzovaná funkce  $g$  jako funkce úhlu pootočení měřené hřídele je harmonická s frekvencí rovnou  $\nu$ -podílu frekvence torzních kmitů  $f_r$ . Nechť navíc  $\nu$  je celé číslo. Protože podle předpokladů rotuje měřená hřídel s konstantní úhlovou rychlostí  $\omega_0$ , je funkce  $g$  také harmonická v čase. V rámci simulace budeme tuto funkci vzorkovat s nerovnoměrností danou vztahem (53). Protože budeme simulovat opět nejhorší možný případ, kdy je jedna perioda torzních kmitů zaznamenána právě dvěma body, můžeme první bod umístit libovolně, řekněme do extrému analyzované funkce  $g$ , liché vzorky budou rozmístěny rovnoměrně s frekvencí  $f_r$ . Pro jednoduchost uvažujme časové měřítko takové, že  $f_r = 1$ , liché vzorky jsou tedy vzdálené o 1. Sudé vzorky jsou vychýlené od pozice  $k + 0.5$ , kde  $k$  je celé číslo, o  $\delta t$ . Vzorkujeme tedy funkci

$$h(t) = \text{Cos}\left(\frac{2\pi}{\nu} \left(t + \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{Cos}(2\pi t)}{2}\right) \frac{\delta t(\kappa)}{2}\right)\right), \quad (54)$$

$$t = 0, 0.5, 1, 1.5, \dots, \nu - 0.5.$$

Funkce je tedy frekvenčně modulovaná úhlovou rychlostí torzních kmitů a její spektrum lze analyzovat např. pomocí techniky uvedené v [19]. Rozložíme funkci  $h$  na dva shodné proti sobě rotující vektory  $h_+(t)$  a  $h_-(t)$

$$h(t) = \text{Cos}(\omega_M t + \varphi_0 + a_m \text{Cos}(2\pi t)) =$$

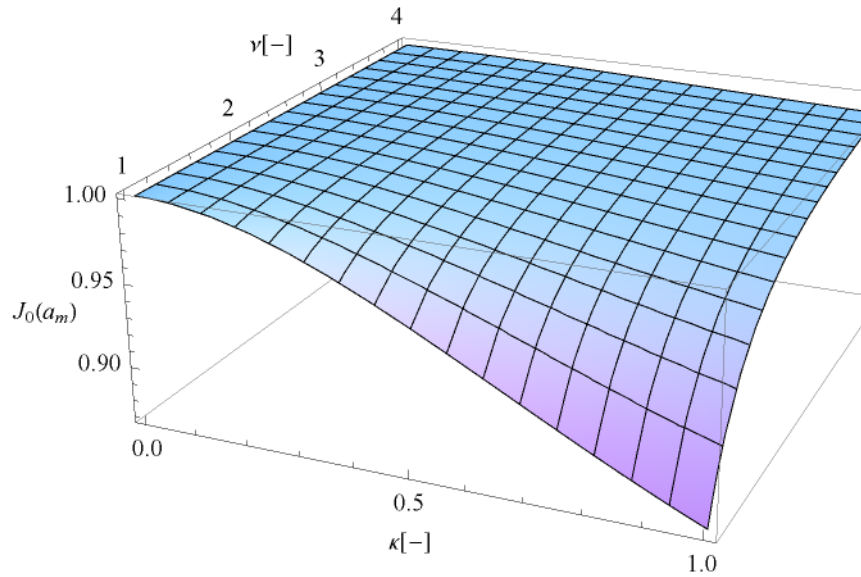
$$\frac{1}{2} \left( e^{i(\omega_M t + \varphi_0 + a_m \text{Cos}(2\pi t))} + e^{-i(\omega_M t + \varphi_0 + a_m \text{Cos}(2\pi t))} \right) = \quad (55)$$

$$h_+(t) + h_-(t),$$

kde  $\omega_M = 2\pi/\nu$  je úhlová rychlost základní frekvence sledované funkce  $h$ ,  $\varphi_0 = \pi \delta t(\kappa)/\nu/2$  je fázový posuv pro výše popsané podmínky simulace a  $a_m = -\varphi_0$  určuje amplitudu modulace. Dále analyzujeme jen vektor  $h_+(t)$ . Ten je možné rozdělit na jednotlivé vlivy

$$h_+(t) = \frac{1}{2} e^{i\omega_M t} e^{i\varphi_0} e^{i a_m \cos(2\pi t)} = \frac{1}{2} e^{i\omega_M t} e^{i\varphi_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(a_m) i^k e^{2\pi i k t}, \quad (56)$$

kde  $J_k$  je  $k$ -tá Besselova funkce 1. druhu. Ovlivněných frekvenčních složek je tedy nekonečně mnoho, reálně jsou však významné pouze některé. Pravděpodobně nejdůležitější je ovlivnění základní harmonické složky původní funkce  $h$ . Ve vektoru  $h_+$  jí odpovídá člen pro  $k = 0$ . Její amplituda je změněna v poměru  $J_0(-\pi \delta t(\kappa) / (2\nu))$ . Průběh této funkce je znázorněn na obrázku 8 a pro konkrétní hodnoty parametrů  $\kappa$  a  $\nu$  vyčíslen v tabulce 4. Je patrné, že pro reálné relativní amplitudy torzních kmitů  $\kappa$  není ovlivnění harmonických složek výrazné, v nejhorších případech pro  $\kappa > 0.5$  je možné uvažovat o filtraci harmonické složky sledované funkce, která odpovídá frekvenci torzních kmitů.

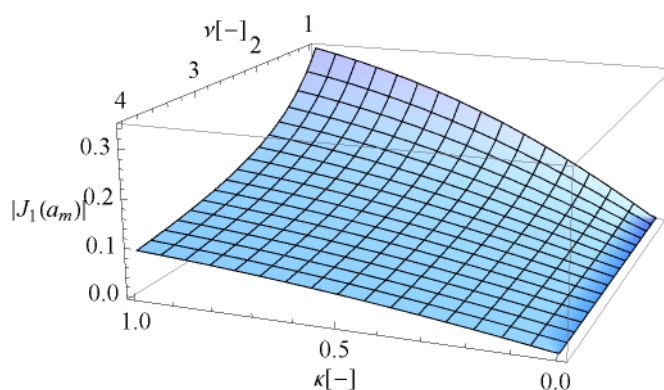


Obr. 8: Relativní změna amplitudy základní harmonické složky sledované funkce vlivem torzních kmitů enkodéru s relativní amplitudou  $\kappa$  a frekvencí rovnou  $\nu$ -podílu frekvence základní harmonické složky.

$\nu/\kappa$	0.15	0.3	0.45	0.6	0.75
1	99.4 %	97.9 %	95.8 %	93.4 %	90.8 %
2	99.9 %	99.5 %	98.9 %	98.3 %	97.7 %
3	99.9 %	99.8 %	99.5 %	99.2 %	99. %
4	100. %	99.9 %	99.7 %	99.6 %	99.4 %

*Tabulka 4: Velikost amplitudy základní harmonické složky vzhledem k původní amplitudě v závislosti na relativní amplitudě torzních kmitů  $\kappa$  a podílu frekvence torzních kmitů a frekvence základní harmonické složky  $\nu$*

Druhou složkou, která vznikne ve spektru vlivem nerovnoměrnosti vzorkování způsobeném použitím chybné úhlové rychlosti pro transformaci z úhlového na časové vzorkování, je frekvence torzních kmitů, která ve vztahu (56) odpovídá členu pro  $k = 1$ . Bude na frekvencích  $(1 \pm \nu)/\nu$ , tedy jako  $1 \pm \nu$  – tá harmonická složka vůči základní harmonické složce sledované funkce a bude mít amplitudu rovnou  $J_1(-\pi \delta t(\kappa)/(2\nu))$  násobku amplitudy základní frekvenční složky. Tato amplituda roste přibližně kvadraticky v závislosti na  $\kappa$  a tento růst přibližně exponenciálně polevuje s rostoucím  $\nu$ . Závislost je znázorněna na obrázku 9 a pro konkrétní hodnoty parametrů  $\kappa$  a  $\nu$  vyčíslena v tabulce 5. Je patrné, že amplituda těchto frekvenčních složek ovlivňuje spektrum relativně více než změna základní harmonické složky, absolutně však dosahuje obvykle pouze několika procent velikosti amplitudy základní harmonické složky. Pro  $\kappa > 0.3$  obvykle postačí filtrovat základní harmonickou složku sledované funkce, tedy složku odpovídající torzním kmitům enkodéru.



*Obr. 9: Relativní amplitudy harmonické složky s číslem  $1 \pm \nu$  sledované funkce vzhledem k amplitudě její základní harmonické složky vlivem torzních kmitů enkodéru s relativní amplitudou  $\kappa$  a frekvencí rovnou  $\nu$ -podílu frekvence základní harmonické složky.*

$\nu \backslash \kappa$	0.15	0.3	0.45	0.6	0.75
1	7 %	14 %	20 %	25 %	29 %
2	4 %	7 %	10 %	13 %	15 %
3	2 %	5 %	7 %	9 %	10 %
4	2 %	4 %	5 %	6 %	8 %
5	1 %	3 %	4 %	5 %	6 %
6	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %

*Tabulka 5: Pokles amplitudy základní harmonické složky v závislosti na relativní amplitudě torzních kmitů  $\kappa$  a podílu frekvence torzních kmitů a frekvence základní harmonické složky  $\nu$*

Vyšší harmonické složky jsou již ovlivněny jen minimálně vzhledem k relativně strmému poklesu Besselovy funkce 1. řádu  $J_k$  pro rostoucí hodnoty parametru  $k$ .

Závěrem můžeme říci, že pro transformaci funkce naměřené v závislosti na úhlu pootočení ovlivněném torzními kmity snímače je možné použít úhlovou rychlost s filtrovaným rezonančním pásmem.

## ■ 5.8 Celková nejistota měření

Shrňme nyní jednotlivé nejistoty měření z různých zdrojů tak, jak byly popsány v předchozím textu pro popsanou metodiku měření a optimální nastavení přístroje. Budeme zvlášť analyzovat nejistotu měření úhlu a nejistotu měření úhlové rychlosti. Protože měřené úhlové zrychlení má pouze orientační charakter, jeho nejistota analyzována nebude. Vzhledem k digitálnímu charakteru měřicího řetězce (počínaje digitálním signálem z enkodérů, přes jeho digitální přesnost a zpracování až po digitální záznam), systém prakticky neobsahuje náhodné chyby a nejistoty typu A, ale prakticky pouze systematické, byť komplikované a někdy nekorigovatelné chyby a nejistoty typu B. Pro jejich určení obvykle není k dispozici jiný způsob, není tedy možné chybu analyzovat statisticky. Budeme tedy vycházet z uvedených odvození a kvalifikovaných odhadů. Do nejistoty měření nebyly zahrnuty chyby vzniklé torzními kmity snímačů, nesouosým umístěním snímače a nedokonalým uložením měřené hřídele, neboť tyto chyby nejsou závislé na měřicí metodě a obvykle mohou být uživatelem korigovány.



No	Zdroj nejistoty	Označení zdroje	Mezní chyba $z_{\max}$ [deg]	Viz vztah	Rozdělení mezní chyby	Přepočet $\chi$	Nejistoty $U_B$
1	Kvantovací chyba	$\delta\varphi$	$\frac{45}{p n_i}$	(6)	Rovn.	$\sqrt{3}$	$\frac{45}{p n_i}$ [deg]

Tabulka 6: Tabulka nejistot měření úhlu pootočení metodikou popsanou ve třetí kapitole s optimálním nastavením podle čtvrté kapitoly

No	Zdroj nejistoty	Označení zdroje	Mezní chyba $z_{\max}$ [RPM]	Viz vztah	Rozdělení mezní chyby	Přepočet $\chi$
1	Kvantovací chyba	$\delta\omega$	$\text{Max}\left(3 \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2^{14}}, \frac{3 \omega_{\min} \omega_{\max}}{4 \times 10^8}\right)$	(19)	Rovn.	$\sqrt{3}$
2	Nepřesnost pulsů	$\delta_p \omega$	$10^{-3} \omega$	(39)	Normální	2
3	Nepřesné měření času	$\delta_t \omega$	$50 \times 10^{-6} \omega$		Normální	2
4	Vliv kabelů	$\delta_c \omega$	$10^{-3} \omega$		Rovn.	$\sqrt{3}$
	Celkem $U_B$	$U_B = \sqrt{\sum u_{Bi}^2}$	$\sqrt{5.8 \times 10^{-7} \omega^2 + m} \leq 7.7 \times 10^{-4} \omega$ [RPM], kde $m = \text{Max}(1.9 \times 10^{-17} \omega_{\max}^2 \omega_{\min}^2, 1.1 \times 10^{-8} (\omega_{\max} - \omega_{\min})^2)$			

Tabulka 7: Tabulka nejistot měření úhlové rychlosti metodikou popsanou ve třetí kapitole s optimálním nastavením podle čtvrté kapitoly

Pro běžně používaný snímač s 3600 pulsy na otáčku bez interpolace je celková nejistota měření úhlu pootočení  $0.0125^\circ$ . Pro úhlovou rychlost je člen  $m$  z celkové nejistoty měření  $U_B$  o dva a více řádů menší než první člen, proto jsme ho zahrnuli do prvního členu s určitou rezervou.

## 6. Fourierova transformace pro nerovnoměrně vzorkované signály

Fourierova transformace jako obecný matematický operátor i jako způsob vyhodnocení diskretních rovnoměrně vzorkovaných dat je detailně zpracována na mnoha místech. Není tomu tak ale pro nerovnoměrně vzorkované signály, jimiž jsou např. v časové doméně data vzorkovaná rovnoměrně v závislosti na úhlu pootočení referenční hřídele rotující nekonstantní rychlostí. V následující kapitole je shrnuta běžně známá teorie Fourierovy transformace a diskretní Fourierovy transformace tak, aby v jejím závěru vynikla specifika zpracování nerovnoměrně vzorkovaných dat touto metodou.

### ■ 6.1 Obecná Fourierova transformace

Při analýze diskretních dat je vždy nutno dbát na určitá pravidla. Pro časově rovnoměrně vzorkovaná data je znám Shannon-Kotelnikovův vzorkovací teorém určující nutné a postačující podmínky pro plnou rekonstrukci, a tedy i bezztrátovou analýzu spojitých signálů z jejich diskretních vzorků. Tyto základní pojmy nejprve shrneme a porovnáme s pravidly pro časově nerovnoměrně vzorkovaná data.

Spektrém  $Y$ , či též Fourierovým integrálem, funkce  $y$  reálné proměnné  $t$  je obecně komplexní funkce reálné proměnné  $\nu$  definovaná jako parametrický integrál

$$\mathcal{F}(y)(\nu) = Y(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-2\pi i \nu t} dt, \quad (57)$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}(Y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu. \quad (58)$$

Zobrazení  $\mathcal{F} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  nazýváme *Fourierovou transformací* nebo též Fourier-Plancherelův operátor. Na tomto místě pouze uvedme, že je to zobrazení definované pro všechny funkce z prostoru  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  (tedy Lebesgueovsky integrovatelné v kvadrátu), je lineární, omezené, jednoznačné a prosté, více podrobností viz např. lit. [2]. Je patrné, že pokud existuje dopředná Fourierova transformace funkce  $y(t)$ , existuje také inverzní Fourierova transformace funkce  $W(\nu) = y(-\nu)$ , a zřejmě i inverzní Fourierova transformace funkce  $y(\nu)$ . Dopředná a inverzní Fourierova transformace jsou tedy z hlediska teorie

záměnné.

Pokud proměnná  $t$  má fyzikální význam času s jednotkami [s], má proměnná  $\nu$  význam frekvence s jednotkami [Hz]. Fourierův integrál pak nazýváme *frekvenčním spektrem*. Pokud má proměnná  $t$  význam vzdálenosti s jednotkami [m], obvykle se značí např.  $x$  a proměnná  $\lambda = 1 / (2 \pi \nu)$  má význam vlnové délky s jednotkou [1/m]. Fourierův integrál je pak nazýván *spektrém vlnových délek*. Pokud má proměnná  $2 \pi t$  význam úhlu pootočení referenční hřídele s jednotkami [rad], obvykle ji budeme značit  $\varphi$ . Pak má proměnná  $\nu$  význam tzv. řádové frekvence s jednotkami [Ord], z anglického order neboli řád. Udává počet průběhů za jednu základní periodu, tedy otáčku referenční hřídele. Fourierovu integrálu pak budeme říkat *řádové spektrum*.

Z takového shrnutí je zřejmé, že všechny závěry odvozené pro frekvenční spektrum jsou platné i pro řádové spektrum, pouze mají odlišnou fyzikální interpretaci, reprezentují jiný model. Cílem této práce je ukázat vztah mezi těmito reprezentacemi a umožnit tak hledání optimálních modelů pro daný fyzikální děj spojením vlastností frekvenční i řádové analýzy.

## ■ 6.2 Periodické funkce

Předchozí definice ovšem nepokrývá důležitou skupinu funkcí - periodické funkce. Ty totiž nejsou na nekonečném intervalu integrovatelné v klasickém smyslu. Jako vhodné zobecnění je definování distribucí, a především tzv. Diracovy  $\delta$ -funkce. Tato funkce je nenulová pouze pro  $t = 0$ , kde nabývá nekonečné hodnoty, za doplňujícího předpokladu, že určitý integrál této funkce přes interval obsahující nulový bod je jednotkový (tzv. filtrační vlastnost  $\delta$ -funkce). Přidáním  $\delta$ -funkce do definičního oboru a oboru hodnot Fourierovy transformace je možné určit spektrum i periodických funkcí. Přímo aplikací sumační vlastnosti  $\delta$ -funkce získáme další její důležité vlastnosti

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1)(\nu) &= \delta(\nu), \\ y(t) &= \cos(2 \pi b t) \implies \mathcal{F}(y)(\nu) = \frac{1}{2} (\delta(b + \nu) + \delta(b - \nu)), \\ y(t) &= \sin(2 \pi b t) \implies \mathcal{F}(y)(\nu) = \frac{i}{2} (\delta(b + \nu) - \delta(b - \nu)). \end{aligned} \quad (59)$$

Pokud je funkce  $y$  periodická (bez újmy na obecnosti na intervalu  $\langle -T/2, T/2 \rangle$ ) a po úsecích hladká, lze ji vyjádřit pomocí Fourierovy řady

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \right), \quad (60)$$

$$a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

V bodech nespojitosti funkce  $y$  konverguje Fourierova řada bodově k aritmetickému průměru limit zleva a zprava. Definujeme koeficienty

$$Y_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) dt, \quad (61)$$

$$Y_k = \frac{a_k - i b_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} dt \text{ pro } k > 0, \quad Y_{-k} = \overline{Y_k}.$$

Ze vztahu pro koeficient  $Y_k$  je patrná souvislost s dopřednou Fourierovou transformací (57). Platí:

$$y(t) =$$

$$Y_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \operatorname{Re}(Y_k) \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) - \operatorname{Im}(Y_k) \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) \right) =$$

$$Y_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( Y_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}} + Y_{-k} e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} \right) = \quad (62)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{\frac{2\pi i k t}{T}} = T \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k \delta(v - k) e^{\frac{2\pi i v t}{T}} dv.$$

Při úpravách jsme užili Eulerova vyjádření komplexních exponenciál a filtrační vlastnosti Diracovy funkce. Z výsledku je při porovnání s (58) patrné, že Fourierovým obrazem periodické funkce je nejvýše spočetná suma složená z Diracových funkcí

$$Y(v) = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k \delta(v T - k). \quad (63)$$

Fourierův obraz periodické funkce je tedy určen nejvýše spočetnou množinou Fourierových koeficientů  $Y_k = \frac{a_k - i b_k}{2}$ ,  $k \geq 0$ . Diracovy funkce jsou přitom rovnoměrně rozloženy podél reálné osy.

## ■ 6.3 Fourierova transformace na omezeném intervalu

Předchozí definice zahrnovala funkce definované na intervalu nekonečné délky. Při běžné analýze procesů v reálném světě ovšem pracujeme jen s intervaly konečné délky. Prosté omezení nosiče funkce (nosič je podmnožina definičního oboru funkce, kde funkce nabývá nenulových hodnot) je prováděno obvykle superpozicí s tzv. Okénkovou funkcí, tedy bodovým součinem s funkcí s omezeným nosičem. V literatuře je definována řada okénkových funkcí. Běžně se však používají především:

- indikátorová funkce, která je jednotková na žádaném intervalu (obdélníkové okno),
- několik oken tvořených jednou půlperiodou trigonometrického polynomu (Hanningovo, Hammingovo a Flat-top okno)
- a případně trojúhelníkové (Bartlettovo) okno.

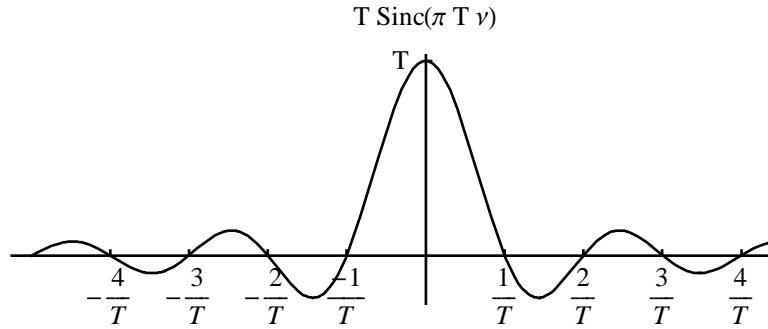
Vynikající rozbor okénkové techniky je např. v lit. [8]. Protože bodovému součinu funkcí odpovídá ve spektrální oblasti konvoluce spekter těchto funkcí (tzv. konvoluční teorém, vztah (66)), zkoumané spektrum je ovlivněno spektrem použitého okna. Například obdélníkové okno na intervalu  $\langle a, b \rangle$  je určeno indikátorovou funkcí

$$1_{\langle a, b \rangle}(t) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow t \in \langle a, b \rangle \\ 0 & \Leftrightarrow t \notin \langle a, b \rangle \end{cases} \quad (64)$$

Fourierův obraz indikátorové funkce  $1_{\langle a, b \rangle}(t)$ ,  $b > a$  je

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1_{\langle a, b \rangle})(\nu) &= (b - a) e^{-\frac{1}{2} i (a+b) \pi \nu} \text{Sinc}((b - a) \pi \nu), \\ \mathcal{F}(1_{\langle -T/2, T/2 \rangle})(\nu) &= T \text{Sinc}(\pi T \nu). \end{aligned} \quad (65)$$

kde funkce  $\text{Sinc}(x) \equiv \text{Sin}(x)/x$ . Funkce má průchody nulou pro  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , což bude důležité při dalších závěrech. Ukázka Fourierova obrazu indikátorové funkce  $1_{\langle -T/2, T/2 \rangle}$  je na obrázku 10.



Obr. 10: Fourierův obraz jednotkového obdélníkového symetrického pulsu šířky  $T$ .

Konvoluce dvou funkcí  $y$  a  $w$  značená symbolem  $*$  je zobrazení  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  definované parametrickým integrálem

$$(y * w)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) w(t - \tau) d\tau. \quad (66)$$

Konvoluční teorém je možné vyjádřit v následující podobě: Mějme dvě integrovatelné funkce  $y, w \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , tzn. existují jejich spektra  $Y = \mathcal{F}(y)$ ,  $W = \mathcal{F}(w)$ . Pak spektrum součinu těchto funkcí je konvolucí jejich spekter a spektrum jejich konvoluce je součinem jejich spekter, tzn.

$$\mathcal{F}(y w) = Y * W, \quad \mathcal{F}(y * w) = Y W. \quad (67)$$

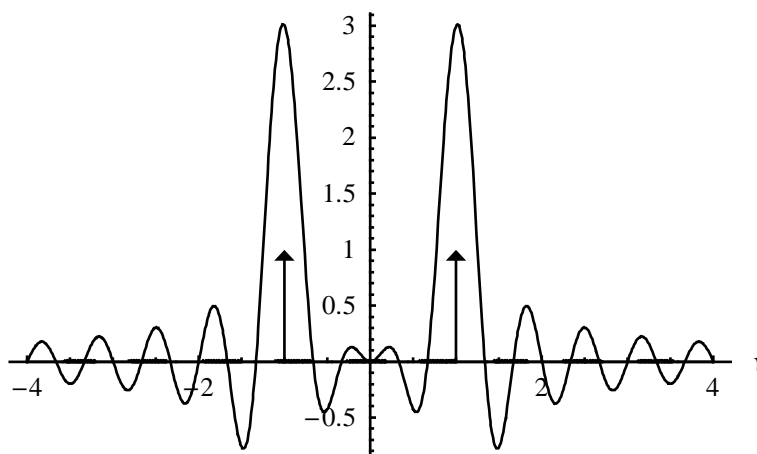
Speciálně pro periodické funkce s periodou  $T$  lze díky filtrační vlastnosti Diracovy funkce vyjádřit Fourierův obraz funkce na omezeném intervalu např. s použitím obdélníkového okna šířky  $L$  jako

$$\begin{aligned} Y_L(\nu) &= \mathcal{F}(y 1_{(-L/2, L/2)})(\nu) = \int_{-L/2}^{L/2} y(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \\ &= T \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k \delta(\tau T - k) L \operatorname{Sinc}(L \pi(\nu - \tau)) d\tau = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k L \operatorname{Sinc}(L \pi(\nu - k/T)). \end{aligned} \quad (68)$$

Protože funkce  $\operatorname{Sinc}(x)$  má nuly pro  $x = \pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ,  $k$ -tý člen uvedené řady je nulový pro frekvenci  $\nu_{k,l} = \frac{l}{L} + \frac{k}{T}$ . Pokud je šířka okna  $L$  odlišná od periody  $T$  funkce  $y$ , jednotlivé členy uvedené řady se navzájem ovlivňují a obecně  $Y_L(\nu) \neq Y(\nu)$  pro žádnou frekvenci  $\nu$ . Tomuto efektu říkáme obecně aliasing. Pokud je však  $L$  celočíselným násobkem základní periody funkce  $T$ , tak na frekvencích  $\nu_k = k/T$  se podílí vždy jen  $k$ -tý (a  $-k$ -tý člen) sumy a tedy platí

$Y_L(\nu_k) = Y(\nu_k)$  pro každé  $k \in \mathbb{Z}$ . Ostatní frekvence jsou však i v tomto případě ovlivněny více členy sumy. Na závěr ještě připomeňme, že v tomto oddíle jsme se stále věnovali spojitým funkcím a Fourierovy koeficienty  $Y_k = Y(\nu_k)$  byly určeny integrací spojitě funkce (61).

Ukázka změny spektra vlivem zmíněné konvoluce je na obrázku 11. Šipky znázorňují Diracovy funkce odpovídající Fourierovu obrazu funkce  $\text{Cos}$  (viz (59)). Křivka znázorňuje Fourierův obraz funkce  $2 \text{Cos}(2\pi t)$  sledované na intervalu délky  $L = 3$ , který je přesně trojnásobkem periody této funkce. Jsou patrné dva průběhy funkce  $\text{Sinc}$  umístěné do pozic Diracových funkcí. V okolí počátku je viditelné, jak se oba tyto průběhy sčítají, neboť postranní laloky nejsou symetrické. Při odečtu hodnot spektra  $Y_L$  ve frekvencích  $\nu_k = k/L = k/3$  a zmenšením o faktor  $L = 3$  však získáme skutečné hodnoty Fourierových koeficientů.



Obr. 11: Fourierův obraz funkce  $2 \text{Cos}(2\pi t)$  sledované na omezeném intervalu délky 3.

## ■ 6.4 Fourierova transformace diskrétních posloupností

Při digitálním zpracování signálů se data zaznamenávají v diskrétních okamžicích  $t_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Matematicky lze vztah mezi sledovanou spojitou funkcí  $y$  a skutečně zaznamenanou funkcí  $y^\Sigma$  vyjádřit opět pomocí součinu s Diracovými funkcemi

$$y^\Sigma(t) = y(t) w(t), \text{ kde } w(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_k). \quad (69)$$

Funkce  $w(t)$  se obvykle označuje *Diracův hřeben*. Pro Fourierův obraz pak platí

$$Y^\Sigma(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(t_k) e^{-2\pi i \nu t_k} = Y(\nu) * W(\nu), \quad (70)$$

$$\text{kde } W(\nu) = \mathcal{F}(w)(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \nu t_k}.$$

Funkci  $W$  nazýváme *spektrálním oknem*. Pro rovnoměrně rozložené okamžiky  $t_k = k \Delta t$  přechází Diracův hřeben v tzv. *periodickou distribuci*. To je ovšem opět periodická funkce, která je ve své periodě délky  $\Delta t$  určena jedinou Diracovou funkcí. Opět ji lze tedy rozepsat ve Fourierovu řadu s jednotkovými koeficienty (viz (59)) konvergující v zobecněném smyslu

$$w(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t k / \Delta t}. \quad (71)$$

Vztahy (69) a (70) a spektrální okno lze tedy pro periodické funkce a periodické distribuce přepsat

$$y^\Sigma(t) = y(t) \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t k / \Delta t},$$

$$W(\nu) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t k / \Delta t}\right)(\nu) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{\Delta t}\right), \quad (72)$$

$$Y^\Sigma(\nu) = \frac{1}{\Delta t} Y(\nu) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{k}{\Delta t}\right).$$

Spektrální okno je tedy opět periodická distribuce s periodou rovnou převrácené hodnotě periody původní periodické distribuce. Fourierův obraz funkce získané rovnoměrným vzorkováním s periodou  $\Delta t$  je tvořen periodickým opakováním (s periodou  $1/\Delta t$ ) Fourierova obrazu původní sledované funkce. Tento závěr je platný pro periodické i neperiodické funkce. Pro zamezení efektu aliasingu je tedy nutná a postačující podmínka omezení nosiče spektra  $Y(\nu)$  na interval kratší než  $1/\Delta t$  (tzn. funkce  $y(t)$  je *frekvenčně omezená*). Tomuto závěru se říká *Nyquistovo kritérium*.



## ■ 6.5 Vzorkovací teorém pro rovnoměrně vzorkovaná data

Shrnutím předchozích dvou oddílů je tzv. Shannonův (též Kotelnikovův, Whittakerův či Nyquistův) vzorkovací teorém: je-li periodická frekvenčně omezená funkce vzorkována s fixní vzorkovací frekvencí nejméně dvakrát vyšší než je nejvyšší frekvence přítomná ve spektru a soudělnou s převrácenou hodnotou periody této funkce, je původní funkce plně rekonstruovatelná z konečného počtu těchto vzorků. Tyto vzorky jednoznačně určují (konečný počet) Fourierových koeficientů, a tedy spektrum této funkce. Vztah k výpočtu Fourierových koeficientů je znám jako diskretní Fourierova transformace (DFT). Pro počet vzorků  $N$  vhodně rozložitelný na součin malých prvočísel je znám algoritmus rychlé Fourierovy transformace (FFT) pro výpočet DFT s obtížností  $N \log(N)$ , viz např. [www.fftw.org](http://www.fftw.org) nebo implementace v moderních verzích programů *Mathematica* či *Matlab*.

Tento známý teorém je vhodné formulovat exaktně pro dva modely Fourierovy transformace, které budeme dále analyzovat: pro frekvenční spektrum a řádové spektrum. Nejprve tedy pro časově rovnoměrně vzorkovaná data: Nechť je funkce  $y$  periodická s periodou  $T$  [s] a její nejvyšší nenulová frekvenční složka má frekvenci  $\nu_B$  [Hz]. Z výše uvedeného je zřejmé, že  $\nu_B$  je celočíselným násobkem základní frekvence  $\nu_y = 1/T$  funkce  $y$ . Nechť je funkce  $y$  vzorkována alespoň s frekvencí  $\nu_{vz} = 2 \nu_{Nq} > 2 \nu_B$ , tedy s intervalem mezi vzorky  $\Delta t = 1/\nu_{vz} < 1/(2 \nu_B)$ , kde  $\nu_{Nq} = \frac{N}{2} \nu_y$  je celočíselným násobkem základní frekvence  $\nu_y$  a nazývá se Nyquistova frekvence. Pak lze funkci  $y$  zcela rekonstruovat z  $N$  po sobě následujících vzorků  $y(t_l)$ ,  $t_l = l \Delta t$ ,  $0 \leq l < N$ . Algoritmus této rekonstrukce spočívá ve výpočtu Fourierových koeficientů dopřednou diskretní Fourierovou transformací (symbolem  $Y^t$  označíme Fourierovo spektrum funkce  $y$  ve smyslu frekvenčního spektra, tedy s časem jako nezávisle proměnnou)

$$Y_k^t = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y(t_l) e^{-2\pi i t_l \nu_k} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y(l \Delta t) e^{-2\pi i k l / N}, \quad (73)$$

$$\nu_k = k f_{vz} / N = k f_y = \frac{k}{N \Delta t}.$$

Fourierovy koeficienty se v tomto případě navíc periodicky opakují po  $N$  prvcích, takže platí  $Y_{N-k} = \overline{Y_k} = Y_{-k}$ . Vzhledem k předpokladům je funkce  $y$  spojitá i se všemi svými derivacemi. Fourierovy koeficienty určují koeficienty Fourierovy řady funkce  $y$  a pomocí nich lze vyjádřit funkci  $y$  v libovolném bodě (díky spojitosti)

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k^t e^{2\pi i k t/T}, \quad y(t_l) = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k^t e^{2\pi i k l/N}. \quad (74)$$

Pro řádové spektrum obvykle předpokládáme, že zkoumaná funkce je periodická s periodou rovnou celočíselnému  $R$ -násobku jedné otáčky referenční hřídele, tedy perioda je  $2\pi R$  [rad],  $R \in \mathbb{N}$ . Základní řádová frekvence potom je  $\omega_y = 1/R$  Ord, kde 1 Ord odpovídá jednomu výskytu za otáčku. Opět předpokládejme, že nejvyšší nenulová řádová frekvenční složka má řádovou frekvenci  $\omega_B$  [Ord]. Funkce  $y$  je nyní vzorkována úhlově rovnoměrně se vzorkovacím intervalem  $\Delta\varphi = 2\pi/p$  [rad], kde  $p$  je počet vzorků za jednu otáčku, neboli též řádová vzorkovací frekvence  $\omega_{vz}$ . Řádová Nyquistova frekvence je polovinou řádové vzorkovací frekvence, takže  $\omega_{Nq} = \omega_{vz}/2 = p/2$  a musí být větší než nejvyšší řádová frekvence  $\omega_B$ . Pokud je počet pulsů enkodéru použitého pro úhlové vzorkování alespoň dvakrát vyšší než je nejvyšší řádová frekvence obsažená v řádovém spektru, může být funkce  $y$  plně rekonstruována z  $N = pR$  po sobě následujících vzorků  $y(\varphi_l) = y(t(\varphi_l))$ ,  $\varphi_l = l\Delta\varphi = 2\pi l/p$ ,  $0 \leq l < pR$ . Řádové Fourierovy koeficienty se vypočtou pomocí algoritmu dopředné diskrétní Fourierovy transformace s úhlem jako nezávisle proměnnou

$$Y_k^\varphi = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y(\varphi_l) e^{-i\varphi_l \omega_k} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} y(l\Delta\varphi) e^{-2\pi i k l/N}, \quad (75)$$

$$\omega_k = k \omega_{vz} / N = k / R = \frac{2\pi k}{N \Delta\varphi}.$$

Při zavedených jednotkách  $\varphi$  [rad] a  $\omega$  [Ord] není v exponentu první sumy koeficient  $2\pi$ , protože je využit v převodním vztahu  $2\pi / [\text{rad}] = [\text{Ord}] = [1/\text{otáčka}]$ . Původní funkci  $y$  můžeme opět vyjádřit pomocí Fourierovy řady

$$y(\varphi) = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k^\varphi e^{i k \varphi / R}, \quad y(\varphi_l) = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k^\varphi e^{2\pi i k l/N}. \quad (76)$$

Úhlové vzorkování se tudíž matematicky chová stejně jako vzorkování časové, ale jednotlivé harmonické složky nemají stejný fyzikální význam jako u časového vzorkování. Pro lineární systémy odpovídají složky harmonické v závislosti na čase přirozeným tvarům kmitů.

## ■ 6.6 Vliv nerovnoměrného vzorkování

Předchozí oddíl definoval Fourierovo spektrum v čase či v úhlu pro rovnoměrně vzorkovaná data. Pro úhlově vzorkovaná data je pomocí diskrétní Fourierovy transformace vypočteno řádové spektrum, což je v řadě případů výhodné, ne však vždy. Podobně pro časově rovnoměrně vzorkovaná data může být žádoucí určení řádového spektra spolu s nebo místo frekvenčního. Způsobem, jakým lze získat frekvenční složky z úhlově rovnoměrně vzorkovaných dat a řádové frekvenční složky z časově rovnoměrně vzorkovaných dat se bude zabývat následující část.

Úhlově rovnoměrné vzorkování je při vyjádření v závislosti na čase nerovnoměrné a podobně časově rovnoměrné vzorkování je v úhlové oblasti nerovnoměrné. Jejich vzájemný vztah lze vyjádřit pomocí úhlové rychlosti referenční hřídele naměřené např. přístrojem DMU. Označme nejprve  $\varphi_j = j \Delta \varphi$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Necht' je úhlová rychlost  $\omega(\varphi_j)$  odpovídající úhlové pozici  $\varphi_j$  určena podle vztahu (1) z délky časového intervalu odpovídajícího úhlovému intervalu  $\langle \varphi_{j-1}, \varphi_j \rangle$ . Pak za předpokladu, že se smysl otáčení v průběhu měření nezměnil, je doba potřebná k natočení referenční hřídele do úhlové pozice  $\varphi_k$  určena vztahem

$$\tau_k = t(\varphi_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Delta \varphi}{\omega(\varphi_j)}. \quad (77)$$

Naopak pro časově rovnoměrné vzorkování  $t_j = j \Delta t$  určíme úhlovou pozici dosaženou za čas  $t_k$  ze vztahu

$$\phi_k = \varphi(t_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \omega(t_j) \Delta t. \quad (78)$$

Obecně se problematikou nerovnoměrně vzorkovaných dat historicky zabývala především astronomická komunita, neboť okamžik sběru dat z vesmíru často nelze ovlivnit. Velké množství výsledků bylo v této oblasti publikováno v sedmdesátých a osmdesátých letech. Nejprve krátce shrňme hlavní z těchto závěrů. V dalších kapitolách budou rozpracovány vlastní závěry.

Pro nerovnoměrně vzorkovaná data není obecně pravdou, že by frekvenčně omezený periodický signál mohl být zcela zrekonstruován z diskrétních dat. I zde však byl v některých případech vzorkovací teorém dokázán. Např. Beutler v lit. [1] ukázal, že pokud je odchylka od rovnoměrného vzorkování menší než přibližně 22%, může být frekvenčně omezený signál zcela zrekonstruován. V kapitole o analytické transformaci však ukážeme, že i pro nejjednodušší případ funkce obsahující jedinou řádovou frekvenci a úhlovou rychlost obsahující také jedinou řádovou frekvenci obsahuje (časové) frekvenční spektrum nekonečně mnoho složek a Beutlerovy závěry nelze použít.

Formálně lze přirozeně ve vztahu (73) za časové okamžiky dosadit libovolné, i nerovnoměrně rozmístěné hodnoty  $t_l$ . Takový výpočet nazýváme *formální diskrétní Fourierova transformace*. Přímý výpočet má však výpočetní náročnost  $N^2$ . Lomb v lit. [12] navrhl estimátor amplitudového frekvenčního spektra z nerovnoměrně vzorkovaných dat, pro který byl v lit. [13] odvozen rychlý algoritmus (s náročností  $N \log(N)$ ). Také statistické vlastnosti tohoto estimátoru jsou uspokojující (viz lit. [15]). Nicméně vypočtené frekvenční spektrum neodpovídá očekávaným výsledkům: často obsahuje velké množství falešných frekvenčních složek vlivem aliasingu. Tento aliasing, který je v tomto textu již naznačen ve vztazích (68) a (70), přehledně popsal Deeming v lit. [7]. Ukázal, že formální diskrétní Fourierovo spektrum  $Y_N$  libovolné (i neperiodické) funkce  $y$  vzorkované v okamžicích  $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}$  je konvolucí skutečného spektra (Fourierova integrálu)  $Y$  této funkce a spektrálního okna  $W_N$  vzorkovací domény

$$Y_N(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} y(t_k) e^{-2\pi i \nu t_k} = Y(\nu) * W_N(\nu),$$

$$\text{kde } W_N(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i \nu t_k}, \quad Y(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-2\pi i \nu t} dt.$$
(79)

Právě konvoluce se spektrálním oknem způsobuje aliasing - přidání falešných frekvencí. Pro rovnoměrné vzorkování je vzniklý aliasing již dobře popsán

v literatuře i výše v tomto textu. Pro nerovnoměrné vzorkování je však spektrální okno  $W_N$  obecná a obvykle komplikovaná funkce a je obtížné tvořit další závěry o vzniklém aliasingu.

Výpočet skutečného spektra funkce z nerovnoměrně vzorkovaných dat vede na problém dekonvoluce vlivu spektrálního okna z formálního DFT. Tato dekonvoluce však nemusí být obecně jednoznačná či dokonce nemusí existovat. Celý problém je možné si představit z perspektivy Hilbertova prostoru  $\mathcal{H}_N^T$  funkcí periodických s periodou  $T$  a frekvenčně omezených s nejvyšší složkou o frekvenci  $N/T$ . Systém funkcí  $\mathbb{E} = \{e^{2\pi i \nu t_k}, 0 \leq t_k \leq T, |k| \leq N\}$  tvoří ortogonální bázi prostoru  $\mathcal{H}_N^T$  právě tehdy, pokud jsou body  $t_k$  rovnoměrně rozmístěny v intervalu délky  $T$  s rozestupem  $\Delta t = T/(2N)$ . Ortogonalita bazických složek znamená, že Fourierovy koeficienty jsou jedinečné a vzájemně nezávislé. Pro nerovnoměrné vzorkování však může množina  $\mathbb{E}$  stále tvořit neortogonální bázi prostoru  $\mathcal{H}_N^T$ , a pak se jednotlivé Fourierovy koeficienty navzájem ovlivňují. Pokud je množina  $\mathbb{E}$  lineárně závislá, Fourierovy koeficienty některých funkcí jsou nejednoznačné a řešení dekonvolučního problému je nejednoznačné. Pokud není systém funkcí  $\mathbb{E}$  doplněn o další funkce přidáním dalších vzorkovacích bodů, není možné vyjádření některých funkcí z prostoru  $\mathcal{H}_N^T$  pomocí funkcí z množiny  $\mathbb{E}$ , tedy dekonvoluce není možná.

## 7. Numerická transformace frekvenčních a řádových spekter a časových a úhlových dat

Možný algoritmus dekonvoluce vlivu nerovnoměrného vzorkování z formálních DFT astronomických dat navrhl Swan v lit. [16]. Na základě jeho myšlenek nyní představíme tento nový algoritmus pro transformaci mezi úhlově a časově vzorkovanými daty a mezi frekvenčními a řádovými spektry. Není to jediný možný přístup, jeho výhodou je však přesně definované ovlivnění frekvenčního spektra vlivem transformace. Alternativními přístupy je např. Hermitova či splinová interpolace nerovnoměrně vzorkovaných dat a jejich následné převzorkování na rovnoměrně vzorkovaná data. Tyto algoritmy jsou obvykle rychlejší než transformace představená v následujícím textu, nezanedbatelně však ovlivní všechny frekvenční složky výsledného signálu.

Podobně jako dříve mějme funkci  $y$ , která může být vyjádřena jako funkce času  $y(t)$  nebo jako funkce úhlu pootočení referenční hřídele  $y(\varphi)$ . Tyto dvě reprezentace jsou svázány úhlovou rychlostí referenční hřídele, která může být opět vyjádřena jako funkce času  $\omega(t)$  nebo jako funkce úhlu pootočení referenční hřídele  $\omega(\varphi)$ . Nejprve nechť je funkce  $y$  a úhlová rychlost  $\omega$  vzorkována úhlově rovnoměrně se vzorkovacím krokem  $\Delta\varphi$ . Přirozeně předpokládejme, že funkce  $y$  může být plně rekonstruována ze vzorkovaných dat, tedy její nejvyšší řádová frekvence je menší než  $\pi/\Delta\varphi$ . Počet vzorků  $N+1 = 2\pi R/\Delta\varphi$  nechť je zvolen tak, že vzorky pokrývají celý počet otáček  $R$  referenční hřídele. Předpokládejme dále, že funkce  $y(\varphi)$  je periodická s periodou  $2\pi$ , tedy jedné otáčky referenční hřídele. Tato úhlová perioda odpovídá v časové reprezentaci určité časové periodě  $T$ , která může být z úhlově vzorkovaných dat odhadnuta jako  $T = \tau_{N+1}/R$ , kde  $\tau_{N+1}$  je určeno podle vztahu (77). Pro časově rovnoměrně vzorkovaná data je tato perioda přirozeně  $T = (M+1)\Delta t$ , kde  $M$  je počet vzorků na otáčku při časovém vzorkování. V tom případě je ovšem neznámý počet otáček  $R$  referenční hřídele, který byl proměřen. Může být analogicky odhadnut jako  $R = \phi_{M+1}/(2\pi)$ , kde  $\phi_{M+1}$  je určeno podle vztahu (78). Nyní označme vektory úhlově a časově rovnoměrně vzorkovaných dat a vektory Fourierových a řádových Fourierových koeficientů podle notace již naznačené výše, a dále vektory nerovnoměrně rozmístěných vzorkovacích bodů v časové a úhlové oblasti podle (74), (75), (77) a (78) následovně:

$$\begin{aligned}
y^\varphi &= \{y(\varphi_0), \dots, y(\varphi_N)\}^T, \quad \varphi_k = k \Delta \varphi, \\
y^t &= \{y(t_0), \dots, y(t_M)\}^T, \quad t_k = k \Delta t, \\
Y^\varphi &= \{Y_{-\lfloor N/2 \rfloor}^\varphi, \dots, Y_{\lceil N/2 \rceil}^\varphi\}^T, \quad Y_{-k}^\varphi = \overline{Y_k^\varphi}, \\
Y^t &= \{Y_{-\lfloor M/2 \rfloor}^t, \dots, Y_{\lceil M/2 \rceil}^t\}^T, \quad Y_{-k}^t = \overline{Y_k^t}, \\
\tau &= \{0, \tau_1, \dots, \tau_N\}^T, \quad \tau_k = t(\varphi_k), \quad 0 \leq k \leq N, \\
\phi &= \{0, \phi_1, \dots, \phi_M\}^T, \quad \phi_k = \varphi(t_k), \quad 0 \leq k \leq M.
\end{aligned} \tag{80}$$

Definujme dále pomocné vektory celých čísel vyjadřující pořadí frekvenční složky

$$\begin{aligned}
e^K &= \{-\lfloor K/2 \rfloor, \dots, \lceil K/2 \rceil\}^T, \\
e_0^K &= \{0, \dots, K\}^T.
\end{aligned} \tag{81}$$

Symbol  $x^T$  bude označovat transpozici vektoru (či matice)  $x$ . Závorkami  $\lfloor x \rfloor$  označujeme nejvyšší celé číslo menší nebo rovno  $x$ , analogicky  $\lceil x \rceil$  značí nejnižší celé číslo větší nebo rovno  $x$ . Tyto vektory reprezentují naměřená a žádaná data. S jejich pomocí vyjádříme Fourierovu dopřednou a inverzní diskrétní transformaci v maticové podobě. Pomocí maticového součinu (značeno tečkou) můžeme definovat následující matice

$$\begin{aligned}
E^\varphi &= \text{Exp}\left(\frac{2\pi i}{N+1} e_0^N \cdot (e^N)^T\right), \\
\text{tn.}(E^\varphi)_{j,k} &= e^{\frac{2\pi i j(k-\lfloor N/2 \rfloor)}{N+1}} = e^{\frac{i\varphi_j(k-\lfloor N/2 \rfloor)}{R}}, \quad 0 \leq j, k \leq N, \\
E^t &= \text{Exp}\left(\frac{2\pi i}{M+1} e_0^M \cdot (e^M)^T\right), \\
\text{tn.}(E^t)_{j,k} &= e^{\frac{2\pi i j(k-\lfloor M/2 \rfloor)}{M+1}} = e^{\frac{2\pi i t_j(k-\lfloor M/2 \rfloor)}{T}}, \quad 0 \leq j, k \leq M, \\
E^\tau &= \text{Exp}\left(\frac{2\pi i}{T} \tau \cdot (e^M)^T\right), \\
\text{tn.}(E^\tau)_{j,k} &= e^{\frac{2\pi i \tau_j(k-\lfloor M/2 \rfloor)}{T}}, \quad 0 \leq j \leq N, \quad 0 \leq k \leq M, \\
E^\phi &= \text{Exp}\left(\frac{i}{R} \phi \cdot (e^N)^T\right), \\
\text{tn.}(E^\phi)_{j,k} &= e^{\frac{i\phi_j(k-\lfloor M/2 \rfloor)}{R}}, \quad 0 \leq j \leq M, \quad 0 \leq k \leq N.
\end{aligned} \tag{82}$$

Symbolem  $\text{Exp}(A)$  rozumíme (jak naznačuje rozepsání po prvcích) aplikování funkce  $\text{Exp}$  na každý jednotlivý prvek matice  $A$ . Notace pomocí maticového součinu je výhodná pro moderní programovací jazyky s vektorovou algebrou, jako je *Mathematica* nebo *Matlab*. Generování matic po prvcích je naopak vhodné pro klasické jazyky jako *C* nebo *Fortran*. Podotkněme, že v uvedené notaci nejsou kladeny žádné požadavky na počty dat, resp.

spektrálních složek  $M + 1$  a  $N + 1$ . Jsou to pouze přirozená čísla, ale mohou být sudá i lichá a navzájem různá. Dále je nutné podotknout, že pro sudý počet vzorků není vektor spektrálních složek symetrický kolem nulové frekvence. Prvky vektorů spektrálních složek jsou také pro jednoduchost indexovány i zápornými indexy, což není v řadě programovacích jazyků možné a je to nutno při implementaci zohlednit. Protože zpracováváme reálné funkce, jsou spektrální složky se zápornými koeficienty komplexně sdružené vůči spektrálním složkám s kladnými indexy. Většina běžných FFT algoritmů proto určuje pouze spektrální složky s kladnými indexy. Pro námi předložený algoritmus je však nutné pracovat i se spektrálními složkami se zápornými indexy. Složky se zápornými indexy také nelze posunout do oblasti kladných indexů jako v (73) vlivem nerovnoměrného vzorkování obsaženého v maticích  $E^T$  a  $E^\phi$ .

S takto zavedeným značením můžeme dopřednou a inverzní diskrétní Fourierovu transformaci (73) až (76) vyjádřit v maticové podobě

$$\begin{aligned} Y^t &= \frac{1}{M+1} (E^t)^* \cdot y^t, \quad y^t = E^t \cdot Y^t, \\ Y^\varphi &= \frac{1}{N+1} (E^\varphi)^* \cdot y^\varphi, \quad y^\varphi = E^\varphi \cdot Y^\varphi. \end{aligned} \quad (83)$$

Symbol  $E^*$  značí komplexně sdruženou transponovanou matici k matici  $E$ . Nyní postoupíme k transformaci z úhlového vyjádření na časové, nechť je tedy dán vektor  $y^\varphi$ . Předpokládejme, že funkce  $y$  je frekvenčně omezená jak ve frekvenčním, tak v řádovém spektru. Vyjma případu konstantní úhlové rychlosti ve skutečnosti tento předpoklad nikdy není přesně splněn (jak bude prokázáno v kapitole o analytické transformaci), ale obvykle postačuje přibližné splnění tohoto předpokladu. Předpokládejme dále, že funkce  $y$  jako funkce času může být plně rekonstruována z Fourierových koeficientů  $Y^t$ . Pak také hodnoty úhlově vzorkovaných dat  $y^\varphi$  mohou být vyjádřeny pomocí Fourierovy řady (74), což je možné v maticové podobě zapsat jako

$$\begin{aligned} y^\varphi &= E^T \cdot Y^t = \frac{1}{M+1} E^T \cdot (E^t)^* \cdot y^t, \\ Y^\varphi &= \frac{1}{N+1} (E^\varphi)^* \cdot E^T \cdot Y^t. \end{aligned} \quad (84)$$

Jak již bylo zmíněno, sumace ve Fourierově rozvoji musí být provedena přes symetrické hodnoty frekvenčních indexů (viz.  $k - \lfloor M/2 \rfloor$  v definici (82).) Druhý výraz vzešel z prvního maticovým násobením zleva maticí  $\frac{1}{N+1} (E^\varphi)^*$ .



Nyní je patrné, že dekonvoluce vlivu spektrálního okna může být pojata jako řešení systému lineárních rovnic (84). Změna vzorkování odpovídá změně souřadného systému v Hilbertově prostoru funkcí  $\mathcal{H}_N^T$  s transformační maticí odpovídající matici soustavy (84). Je možná dvojí implementace:

1) buď jako řešení první soustavy rovnic vyjádříme vektor  $y^t$  ze zadaného vektoru  $y^\varphi$  a pak klasickou FFT technikou vypočteme frekvenční spektrum  $Y^t$  z vektoru  $y^t$ ,

2) nebo klasickou FFT technikou vypočteme řádové spektrum  $Y^\varphi$  z vektoru  $y^\varphi$  a pak řešením druhé soustavy rovnic vyjádříme vektor hodnot frekvenčního spektra  $Y^t$ .

Oba způsoby jsou matematicky ekvivalentní a mají podobné numerické vlastnosti. První z přístupů odpovídá interpolaci trigonometrickým polynomem, druhý přístup jasněji zjevuje vztah mezi řádovým a frekvenčním spektrem. Pro konstantní úhlovou rychlost  $\omega(\varphi) = c$  jsou matice obou soustav jednotkové a obě spektra jsou shodná.

Podobná transformace může být odvozena pro výpočet řádových spekter z časově rovnoměrně vzorkovaných dat funkce  $y$  a úhlové rychlosti  $\omega$ . Systém lineárních rovnic má podobu

$$\begin{aligned} y^t &= E^\phi \cdot Y^\varphi = \frac{1}{N+1} E^\phi \cdot (E^\varphi)^* \cdot y^\varphi, \\ Y^t &= \frac{1}{M+1} (E^t)^* \cdot E^\phi \cdot Y^\varphi. \end{aligned} \quad (85)$$

Nyní je na místě krátká diskuse o řešení systému (84). Matice  $E^\tau \cdot (E^t)^*$  a  $(E^\varphi)^* \cdot E^\tau$  mají  $N+1$  řádků a  $M+1$  sloupců. Pro  $N=M$  má systém nejvýše jedno řešení, pro  $R=1$  a úhlovou rychlost  $\omega(\varphi) > 0$  právě jedno řešení. Je však výhodné, pokud  $N \gg M$  a soustava je přeurčená. Pak je možné ji řešit ve smyslu techniky nejmenších čtverců. Vyšší  $N$  může být dosaženo jednoduše, např. sběrem dat přes několik otáček referenční hřídele  $R > 1$ . Takové řešení vyjadřuje nejlepší aproximaci průběhu funkce  $y$  přes  $R$  průběhů ve smyslu nejmenších čtverců a obsahuje redukci šumu v datech a běžných drobných odchylek od periodicity. Velmi se osvědčilo řešení pomocí nalezení pseudoinverzní matice systému pomocí rozkladu matice na singulární hodnoty (singular value decomposition).

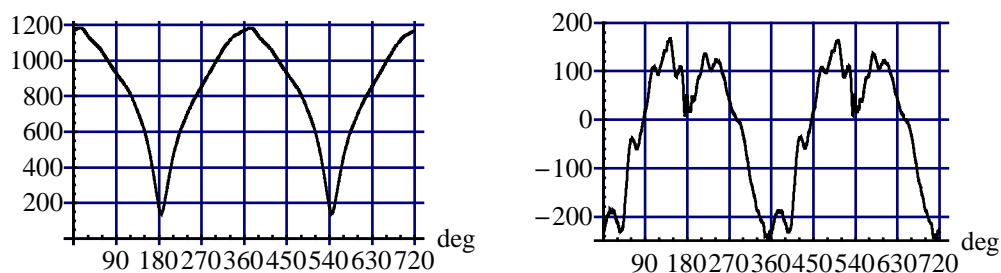
Inverze, či pseudoinverze matice je přirozeně mnohem časově náročnější úkol než klasický FFT algoritmus a neexistují pro něj speciální integrované

obvody, nicméně pokud je vyhodnocováno současně několik funkcí ze stejného systému, stačí provést (pseudo-)inverzi pouze jednou a použít ji pro každý zpracovávaný signál. Novou (pseudo-)inverzi je nutné počítat pouze při změně průběhu úhlové rychlosti. Typicky je také počet hledaných frekvenčních hodnot  $M$  podstatně nižší než je počet vzorků  $N$ . Rychlost výpočtu pseudoinverzní matice závisí právě na  $M$ , zatímco rychlost výpočtu FFT závisí na  $N$ .

## ■ 7.1 Příklad

Bylo provedeno měření na tkacím stavu Cam-el z produkce VÚTS, a.s. Tento tkací stav přináší některé průlomové prvky do návrhu stroje: klasické mechanismy, které byly u tkacích stavů obvykle vačkové, jsou nahrazeny řízenými servopohony. Tato záměna umožňuje některé velmi inovativní přístupy k návrhu celého stroje. Z pohledu na tomto místě popisovaného výzkumu je zajímavá velmi vysoká nerovnoměrnost otáčení referenční hřídele - při střední úhlové rychlosti 650 RPM kolísá úhlová rychlost v rámci jedné otáčky od 136 RPM do 1185 RPM, což znamená celkovou nerovnoměrnost přibližně 80% střední hodnoty. Taková nerovnoměrnost nebyla pro klasické vačkové mechanismy možná vzhledem k velkým momentům setrvačnosti. Přirozeně je velmi výjimečná i mezi jinými průmyslovými odvětvími, ale pro tkací stav znamená velmi dobré textilně-technologické vlastnosti, protože umožňuje dlouhý časový interval pro prohození útku napříč osnovou a rychlé zatkání tohoto útku do tkaniny.

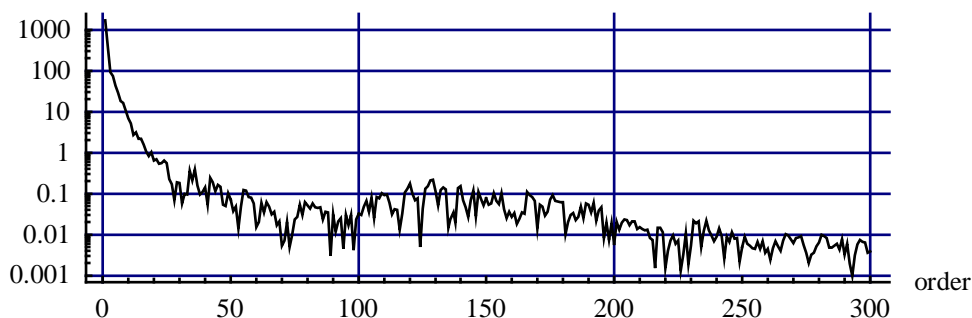
Měření byla prováděna jak s časově, tak s úhlově rovnoměrným vzorkováním (i když samozřejmě ne současně, ale za stejných podmínek), proto jsou vhodným příkladem pro porovnání výsledků transformace se skutečně měřenými hodnotami. Za ukázkové průběhy byla zvolena vlastní úhlová rychlost hřídele servopohonu a zrychlení bidla. Bidlo tkacího stavu zajišťuje zatkání nově prohozeného útku do tkaniny. Dva cykly střední hodnoty průběhů těchto veličin vypočtené z 55 dvojcyklů v závislosti na úhlu pootočení jsou zobrazeny na obr. 12.



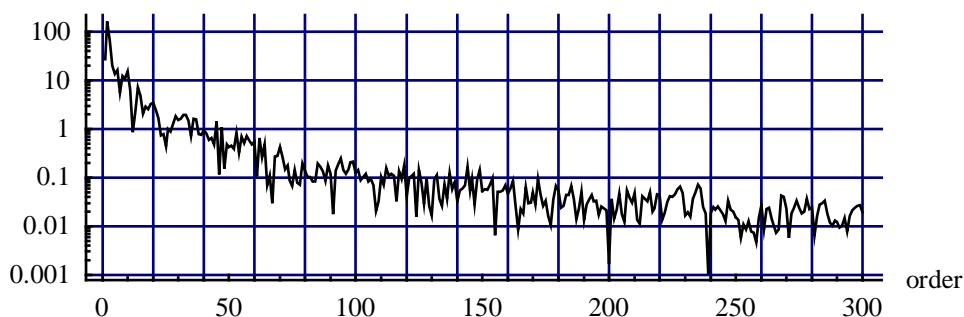
Obr. 12: Dva cykly úhlové rychlosti hnací hřídele [RPM] (vlevo) a zrychlení bidla [ $m/s^2$ ] jako funkce úhlu pootočení hnacího hřídele.

Střední hodnota z 55 cyklů.

Měření bylo provedeno pomocí enkodéru s 3600 pulsy na jednu otáčku, data byla snímána každé 2 pulsy snímače, tedy úhlový vzorkovací interval byl  $\Delta\varphi = 0.2^\circ$ . Časová měření byla pořizována se vzorkovací frekvencí 20 kHz. Na obrázcích 13 a 14 jsou řádová spektra vypočtená vždy z prvních cyklů zobrazených na obr. 12 (pouze prvních 300 řádových složek je zobrazeno, vypočteno bylo všech 900 složek).



Obr. 13: Řádové spektrum úhlové rychlosti hnací hřídele [RPM] z prvního cyklu znázorněného na obrázku 12, tzn. ze středního průběhu z 55 cyklů stroje.



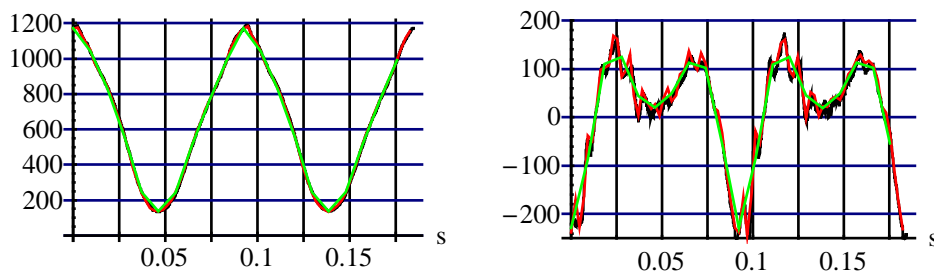
Obr. 14: Řádové spektrum zrychlení bidla [ $m/s^2$ ] z prvního cyklu znázorněného na obrázku 12, tzn. ze středního průběhu z 55 cyklů stroje.

Obr. 15 znázorňuje průběh úhlové rychlosti a zrychlení bidla měřené rovnoměrně v čase (černě). Protože určit střední průběhy z více cyklů je v časové reprezentaci náročné (každý cyklus má mírně odlišnou délku), jsou nakresleny pouze první 2 cykly. Ty se tedy mohou od středního průběhu mírně lišit.

Na obr. 15 jsou současně znázorněny transformované průběhy vypočtené popsanou metodou (viz (84)) z úhlově rovnoměrně vzorkovaných dat z obr. 12. Pro ilustraci byla použita 2 nastavení:

- $M = 19$ , tzn. bylo vypočteno 20 v čase rovnoměrně rozmístěných hodnot, které jsou určeny 10 jednoznačnými hodnotami frekvenčního spektra (zeleně),
- $M = 79$ , tzn. bylo vypočteno 80 v čase rovnoměrně rozmístěných hodnot, které jsou určeny 40 jednoznačnými hodnotami frekvenčního spektra (červeně).

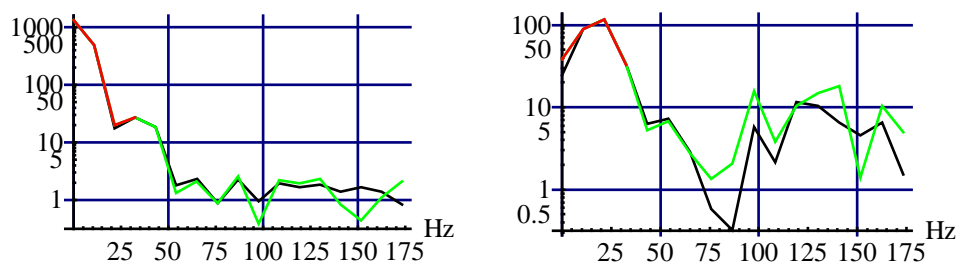
Pro transformaci byly použity dva cykly (dvě otáčky) úhlově vzorkovaných dat, tzn.  $N = 3599$ . Za účelem vykreslení těchto grafů byly oba cykly považovány za jeden, tzn.  $R = 1$ . Vypočtený vektor časově rovnoměrně vzorkovaných dat pak také obsahuje 2 cykly.



Obr. 15: Dva cykly úhlové rychlosti hnací hřídele [RPM] (vlevo) a zrychlení bidla [ $m/s^2$ ] jako funkce času. Černě je hodnota měřená se vzorkováním rovnoměrným v čase, zeleně a červeně jsou hodnoty vypočtené ze 2 cyklů měřených se vzorkováním rovnoměrným v úhlu. Zelená křivka byla určena s parametrem  $M = 19$ , červená s  $M = 79$ .

Obě nastavení na první pohled vedou k dobré aproximaci i při tak vysoké nerovnoměrnosti otáčení hnací hřídele a nízkých hodnotách výsledného počtu vzorků  $M$ . Zkoumané průběhy velmi často obsahují pouze omezené množství frekvenčních složek a vysoká periodicita úhlově vzorkovaných dat umožňuje dobrý odhad časově reprezentovaných dat, tak jako to je v tomto případě. Jak již bylo zmíněno, mírné odchylky časově měřených dat od průběhů odhadnutých z úhlově vzorkovaných dat mohou být spíše obsaženy v časových datech, než aby byly způsobeny použitou transformací.

Z prvního cyklu transformovaných dat bylo vypočteno frekvenční spektrum a bylo porovnáno s frekvenčním spektrem vypočteným z časově naměřených dat. Výsledek je na obr. 16. Opět je patrná dobrá shoda i pro malé hodnoty parametru  $M$ .



Obr. 16: Frekvenční spektrum úhlové rychlosti hnací hřídele [RPM] (vlevo) a zrychlení bidla [ $m/s^2$ ] (vpravo) z prvního cyklu znázorněného na obr. 15.

## 8. Analytická souvislost mezi frekvenčními a řádovými spektry

Pokusme se nalézt přímý analytický vztah mezi frekvenčními a řádovými spektry. Budeme zkoumat jen několik jednoduchých případů, které nám však poskytnou určitý teoretický náhled. Na úvod poznamenejme, že některé výsledky byly vypočteny pomocí systému *Mathematica* pro symbolické úpravy a nejsou proto detailně odvozovány. Všechny výsledky však byly ověřovány numericky.

Předpokládejme opět periodický systém popsany hnací úhlovou rychlostí (např. hnacího motoru nebo hřídele vačkového mechanismu). Úhlová rychlost může být vyjádřena opět jako funkce úhlu pootočení  $\varphi$  nebo funkce času  $t$ . Teoretická analýza pro úhlové rychlosti zadané jako harmonické funkce času, což je v technické praxi nejčastější případ, je uvedena např. v lit. [19]. V některých případech je ovšem výhodné vyjádřit úhlovou rychlost jako harmonickou (kladnou) funkci úhlu pootočení. V nejjednodušším případě

$$\begin{aligned}\omega(\varphi) &= \omega_0 + \omega_m \sin(n_\omega \varphi) = \omega_0(1 + \kappa \sin(n_\omega \varphi)), \\ n_\omega &\in \mathbb{N}, \quad \kappa = \frac{\omega_m}{\omega_0} \in (0, 1).\end{aligned}\tag{86}$$

Zde  $\omega_0$  je úhlová střední hodnota úhlové rychlosti  $\omega(\varphi)$  (odlišná od časové střední hodnoty). Úhlová rychlost je periodická jako funkce úhlu pootočení s periodou  $2\pi/n_\omega$ . Přirozeně je úhlová rychlost periodická také jako funkce času s periodou  $T$ . Čas potřebný k rotaci o úhel  $\varphi$  je určen vztahem

$$\begin{aligned}t(\varphi) &= \int_0^\varphi \frac{1}{\omega(\phi)} d\phi = \\ &= \frac{T}{\pi} \left( k\pi - \alpha + \text{ArcTan} \left( \frac{\sin(\alpha) + \tan(\beta/2)}{\cos(\alpha)} \right) \right), \\ k &= \left\lfloor \frac{n_\omega \varphi + \pi}{2\pi} \right\rfloor, \quad \beta = \text{Mod} \left( \frac{n_\omega \varphi + \pi}{2\pi} \right) - \pi, \\ T &= \frac{2\pi}{n_\omega \omega_0 \cos(\alpha)}, \quad \kappa = \sin(\alpha).\end{aligned}\tag{87}$$

Klíčovým krokem zde byla náhrada parametru  $\kappa \in (0, 1)$  parametrem  $\alpha \in (0, \pi/2)$ . Tato náhrada významně zjednoduší řadu následujících úprav. Nový parametr  $k$  vyjadřuje počet dokončených otáček při pohybu, parametr  $\beta$  určuje úhlovou pozici v aktuální otáčce a  $T$  je časová perioda jedné otáčky.

Protože úhlová rychlost je kladná, funkce  $t(\varphi)$  je prostá, a tedy má inverzní funkci vyjadřující závislost úhlu pootočení na čase

$$\varphi(t) = \frac{2}{n_\omega} \left( \text{ArcTan} \left( \frac{\text{Sin}(\pi t / T)}{\text{Cos}(\pi t / T + \alpha)} \right) + l \pi \right),$$

$$l = \left\lfloor \frac{t}{T} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\pi} \right\rfloor. \quad (88)$$

Zde proměnná  $l$  označuje počet period pohybu, které uběhly od úhlu pootočení  $\alpha + \pi/2$  až do času  $t$ .

Definujme nyní jinou reálnou funkci  $y$  periodickou jako funkci úhlu pootočení s periodou  $2\pi$ . Funkce  $y$  může být rozepsána do podoby Fourierovy řady v exponenciálním tvaru

$$y(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{i n \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (\text{Cos}(n \varphi) + i \text{Sin}(n \varphi)),$$

$$A_{-n} = \overline{A_n}. \quad (89)$$

Komplexní koeficienty  $A_n$  Fourierovy řady jako funkce úhlu pootočení tvoří tzv. řádové spektrum. Přestože zápis ve vztahu (89) a v odvozených vztazích obsahuje imaginární jednotku, s ohledem na komplexně sdružené dvojice koeficientů  $A_n$  a  $A_{-n}$  nabývá suma pouze reálných hodnot. Fourierova řada může být rozepsána pomocí Čebyševových polynomů prvního a druhého druhu  $T_\nu$  a  $U_\nu$  (přímo z definice těchto funkcí)

$$y(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (T_{n/n_\omega}(\text{Cos}(n_\omega \varphi)) + i \text{Sin}(n_\omega \varphi) U_{n/n_\omega-1}(\text{Cos}(n_\omega \varphi))). \quad (90)$$

Pokusíme se odtud vyjádřit  $y(\varphi)$  jako funkci času. Využijeme vztahu (88), použijeme normalizovanou bezrozměrnou proměnnou  $x = 2\pi t / T + \alpha$  odvozenou z času a získáme

$$\begin{aligned}
\cos(n_\omega \varphi(x)) &= \frac{\cos(\alpha) \cos(x)}{1 - \sin(\alpha) \sin(x)}, \\
\sin(n_\omega \varphi(x)) &= \frac{\sin(x) - \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha) \sin(x)}, \\
y(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \left( T_{n/n_\omega} \left( \frac{\cos(\alpha) \cos(x)}{1 - \sin(\alpha) \sin(x)} \right) + \right. \\
&\quad \left. i \frac{\sin(x) - \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha) \sin(x)} U_{n/n_\omega-1} \left( \frac{\cos(\alpha) \cos(x)}{1 - \sin(\alpha) \sin(x)} \right) \right).
\end{aligned} \tag{91}$$

Funkce  $y(x)$  je periodická s periodou  $2\pi n_\omega$ , což odpovídá jedné původní periodě  $2\pi$ . Její Fourierova transformace je obecně netriviální. Pokud jsou přítomné jen členy  $n/n_\omega \in \mathbb{N}$ , tedy funkce  $y(\varphi)$  obsahuje pouze celočíselné násobky harmonických úhlové rychlosti, Čebyševovy polynomy jsou polynomy ve vlastním slova smyslu. Jinak mohou být vyjádřeny pomocí obecných Gauss-Barnesových hypergeometrických funkcí  ${}_2F_1(a, b; c; z)$ , které jsou definovány nekonečnou mocninnou řadou a mohou být integrovány / vyjadřovány po členech (viz např. lit. [22])

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(a, b; c; z) &= \\
\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(c) \Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt, \\
|z| < 1, \quad c > b > 0, \quad a, b, c &\in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{92}$$

Symbol  $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$  značí Pochhammerův symbol a  $\Gamma(x)$  je Eulerova gamma funkce. V následujícím textu se pokusíme sumu (91) vyjádřit v podobě Fourierovy řady v proměnné  $x$ , resp. v časové proměnné  $t$ . Tím získáme vztah mezi Fourierovými koeficienty vyjádřenými v časové a v úhlové doméně.

## ■ 8.1 Elementární případ

Uvažujme nejprve nejjednodušší možný případ  $A_0 \neq 0$ ,  $A_{n_\omega} = -i a/2$ ,  $A_{-n_\omega} = i a/2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , ostatní  $A_n = 0$ . Pro tento případ nabývá funkce  $y(\varphi)$  v normalizované proměnné  $x = 2\pi t/T + \alpha$  tvaru

$$\begin{aligned}
y(\varphi) = A_0 + a \sin(n_\omega \varphi) &\implies y(x) = \\
A_0 + a \frac{\sin(x) - \kappa}{1 - \kappa \sin(x)} &= a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n e^{i n x/n_\omega}.
\end{aligned} \tag{93}$$



Tato funkce je periodická v proměnné  $x$  s periodou  $2\pi$ . My ovšem hledáme její Fourierovu řadu vzhledem k periodě celé otáčky, tedy  $2\pi n_\omega$ . Fourierovy koeficienty jsou tedy nařaděné v poměru  $n_\omega$ , tedy pouze koeficienty  $Y_{nn_\omega}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  jsou nenulové. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy uvažovat  $n_\omega = 1$ . Výpočet Fourierových koeficientů přímou integrací z definice vede ke komplikovaným sumám hypergeometrických funkcí. Proto použijeme jiné odvození. Definujeme

$$\begin{aligned} C^k(n) &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^k(x)}{1 - \kappa \sin(x)} \cos(nx) dx, \\ S^k(n) &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^k(x)}{1 - \kappa \sin(x)} \sin(nx) dx, \\ C(n) &= C^1(n) - \kappa C^0(n), \quad S(n) = S^1(n) - \kappa S^0(n). \end{aligned} \tag{94}$$

Členy řad  $C(n)$  a  $S(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  nazveme *základní integrály*, členy  $C^k(n)$  a  $S^k(n)$  *dílčí integrály* řádu  $k$ . Použitím této notace jsou Fourierovy koeficienty vypočteny jednoduše ze základních integrálů pomocí vztahu

$$Y_{-n} = \frac{C(n) + i S(n)}{2\pi}. \tag{95}$$

Časová střední hodnota  $Y_0 = A_0 - a \tan(\alpha/2)$  je jednoduše určitelná přímou integrací, Fourierovy koeficienty se záporným indexem jsou komplexně sdružené k členům s kladnými indexy, zaměříme se tedy pouze na členy  $Y_n$  s kladnými indexy. Jednoduše lze dokázat, že polovina hodnot řad  $C(n)$  a  $S(n)$  je nulová. Uvažujme např. dílčí integrál  $S^k(2n)$ . Protože integrand je periodická funkce s periodou odpovídající integračním mezím, můžeme integrační meze posunout a následně rozdělit na poloviny. Provedeme v druhém z integrálů substituci takovou, abychom jeho meze opět posunuli na stejné meze, jako má první integrál. Nyní můžeme oba integrály opět sjednotit, neboť mají stejné meze, a integrand zjednodušíme. Je patrné, že nový integrand je lichá funkce pro všechny hodnoty parametru  $k$  a funkce je integrována přes interval symetrický kolem nuly. Celý integrál je tedy nulový. Podobně postupujeme pro  $C^k(2n+1)$

$$\begin{aligned}
S^k(2n) &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^k(x) \sin(2nx)}{1 - \kappa \sin(x)} dx = \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^k(x) \sin(2nx)}{1 - \kappa \sin(x)} dx + \\
&\quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^k(x+\pi) \sin(2n(x+\pi))}{1 - \kappa \sin(x+\pi)} dx = \\
&\quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + (-1)^k + \kappa \sin(x) (1 - (-1)^k)}{1 - \kappa^2 \sin^2(x)} \sin^k(x) \sin(2nx) dx,
\end{aligned} \tag{96}$$

$$S(2n) = S^k(2n) = C(2n+1) = C^k(2n+1) = 0.$$

Další identitu je možné sestavit z následujícího jednoduchého vztahu

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \kappa \sin(x)}{1 - \kappa \sin(x)} \cos(nx) dx = C^0(n) - \kappa C^1(n).
\end{aligned} \tag{97}$$

Podobný vztah platí pro  $S^0(n)$  a  $S^1(n)$ . Z toho můžeme vyjádřit základní integrály pomocí dílčích integrálů řádu 0

$$\begin{aligned}
C(n) &= \frac{1 - \kappa^2}{\kappa} C^0(n) = \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)} C^0(n), \\
S(n) &= \frac{1 - \kappa^2}{\kappa} S^0(n) = \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)} S^0(n).
\end{aligned} \tag{98}$$

Dílčí integrály mohou být vypočítány matematickou indukcí. Nejprve určíme počáteční členy  $C^0(0)$  a  $S^0(1)$ . Podobným postupem, jaký byl použit v odvození (96) a substitucí  $u = \sin(x)^2$  získáme

$$\begin{aligned}
C^0(0) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \kappa \sin(x)} dx = \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - \kappa^2 \sin(x)^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{u^{-1/2}(1-u)^{-1/2}}{1 - \kappa^2 u} du = \\
&= 2 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; 1; \kappa^2\right) = \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \kappa^2}} = \frac{2\pi}{\cos(\alpha)}, \tag{99} \\
S^0(1) &= 2\kappa \int_0^1 \frac{u^{1/2}(1-u)^{-1/2}}{1 - \kappa^2 u} dx = \\
&= 2\kappa \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} {}_2F_1\left(1, \frac{3}{2}; 2; \kappa^2\right) = \frac{2\pi}{\cos(\alpha)} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).
\end{aligned}$$

Využili jsme vztah pro hypergeometrickou funkci (92) a její tabulované hodnoty z lit. [22]. Nyní vytvoříme identity pro indukční krok. Pomocí sumační formule pro  $\sin((n+2)x)$  a  $\cos((n+2)x)$  a vztahu (97) získáme

$$\begin{aligned}
C^0(n+2) &= C^0(n) - 2 \frac{S^1(n+1)}{\kappa} = C^0(n) - \frac{2}{\kappa} S^0(n+1), \\
S^0(n+2) &= S^0(n) + 2 \frac{C^1(n+1)}{\kappa} = S^0(n) + \frac{2}{\kappa} C^0(n+1).
\end{aligned} \tag{100}$$

Nyní můžeme provést vlastní indukci. Předpokládejme, že

$$\begin{aligned}
C^0(n) &= (1 + (-1)^n) \frac{\pi}{\cos(\alpha)} \left(i \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n, \\
S^0(n) &= -i(1 - (-1)^n) \frac{\pi}{\cos(\alpha)} \left(i \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n.
\end{aligned} \tag{101}$$

Každý druhý dílčí integrál je nulový. Povšimněme si, že přestože vztahy s ohledem na jednoduchost zápisu obsahují imaginární jednotku, nabývají ve skutečnosti pouze reálných hodnot. Provedeme indukční krok v obou posloupnostech současně  $\{C^0(2n), S^0(2n+1)\} \rightarrow \{C^0(2n+2), S^0(2n+3)\}$ .

Indukční krok je dokázán jednoduše pomocí (100) a vztahu

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}}. \tag{102}$$

Celkově tedy Fourierovy koeficienty jsou ve tvaru

$$Y_n = e^{-i n \pi/2} \tan^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cot(\alpha). \quad (103)$$

Nyní shrneme získané výsledky. Máme definovaný systém popsany v závislosti na úhlu pootočení

$$\begin{aligned} \omega(\varphi) &= \omega_0(1 + \kappa \sin(n_\omega \varphi)), \quad n_\omega \in \mathbb{N}, \quad \sin(\alpha) = \kappa, \\ y(\varphi) &= A_0 + a \sin(n_\omega \varphi). \end{aligned} \quad (104)$$

Rozvoj funkce  $y$  ve Fourierovu řadu v závislosti na čase je

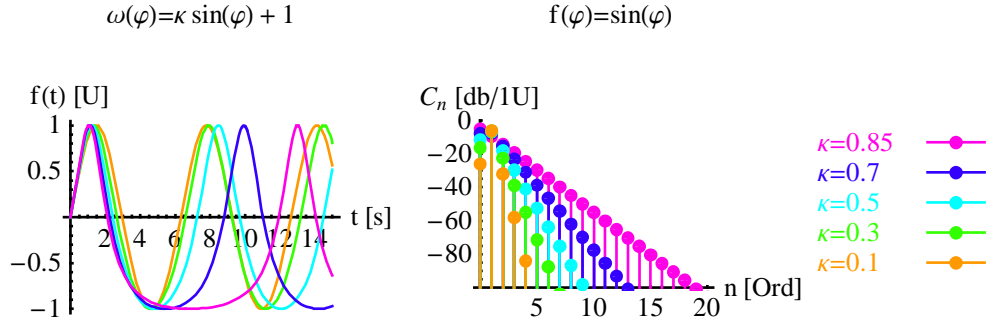
$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n e^{\frac{2\pi i n t}{n_\omega T}}, \quad T = \frac{2\pi}{n_\omega \omega_0 \cos(\alpha)}, \\ Y_0 &= A_0 - a \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), \\ Y_{n n_\omega} &= a e^{-i n \pi/2} \tan^{|n|}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cot(\alpha), \end{aligned} \quad (105)$$

$Y_n = 0$  pro ostatní hodnoty  $n$ .

V uvedeném vztahu pro  $Y_{n n_\omega}$  přibyla absolutní hodnota v exponentu tangenty, protože výše uvedené odvození předpokládalo pouze kladné hodnoty indexu  $n$  a Fourierovy koeficienty pro  $n < 0$  jsou k nim pouze komplexně sdružené. Ve spektrální analýze je obvyklé zobrazovat pouze amplitudy Fourierových koeficientů, a to v logaritmické stupnici

$$\begin{aligned} \text{Log}(|Y_{n n_\omega}|) &= \\ \text{Log}(|a \cot(\alpha)|) + n \text{Log}\left(\left|\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|\right) &= c_0 + n c_1. \end{aligned} \quad (106)$$

Jinými slovy, nerovnoměrnost úhlové rychlosti vybudí ve sledované funkci nekonečně mnoho frekvencí, které ubývají v logaritmické stupnici lineárně. Ukázka tohoto elementárního případu pro různé hodnoty parametru  $\kappa$  je na obr. 17.



Obr. 17: Funkce  $\sin(\varphi)$  vyjádřená jako funkce času pomocí úhlové rychlosti ve tvaru  $1 + \kappa \sin(\varphi)$  pro různé hodnoty parametru  $\kappa$  (vlevo) a její frekvenční spektrum (vpravo).

## ■ 8.2 Rozšíření o fázový posuv

Uvažujeme nyní základní příklad (93) rozšířený o fázový posuv  $\varphi_0$

$$y(\varphi) = A_0 + a \sin(n_\omega \varphi + \varphi_0) = A_0 + a \cos(\varphi_0) \sin(n_\omega \varphi) + a \sin(\varphi_0) \cos(n_\omega \varphi). \quad (107)$$

Je zřejmé, že vzhledem k linearitě Fourierovy transformace stačí analyzovat případ  $\hat{y}(\varphi) = \cos(n_\omega \varphi)$  a tento výsledek zkombinovat s výsledkem (105). Analogicky k (93) vyjádříme funkci  $\hat{y}$  v závislosti na normalizovaném bezrozměrném čase  $x = 2\pi t/T + \alpha$

$$\hat{y}(x) = \cos(\alpha) \frac{\cos(x)}{1 - \sin(\alpha) \sin(x)} = \cos(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{Y}_n e^{i n x / n_\omega}. \quad (108)$$

Opět se omezíme na případ  $n_\omega = 1$ . Podobně jako v prvním případě definujeme dílčí integrály (základní nyní nejsou potřeba), a analogicky ukážeme, které jsou vždy nulové

$$\begin{aligned} \hat{C}^k(n) &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^k(x)}{1 - \kappa \sin(x)} \cos(nx) dx, \\ \hat{S}^k(n) &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^k(x)}{1 - \kappa \sin(x)} \sin(nx) dx, \\ \hat{C}^{2k+1}(2n) &= \hat{C}^{2k}(2n+1) = \hat{S}^{2k}(2n) = \hat{S}^{2k+1}(2n+1) = 0. \end{aligned} \quad (109)$$

Pro  $k=0$  jsou dílčí integrály podle vztahů (109) a (94) shodné, tedy  $\hat{C}^0(n) = C^0(n)$ ,  $\hat{S}^0(n) = S^0(n)$ . Použitím součtového vzorce pro  $\cos((n+1)x)$ ,

resp.  $\text{Sin}((n+1)x)$  určíme vztah mezi dílčími integrály podle vztahů (109) a (94) pro  $k = 1$

$$\begin{aligned}\hat{C}^1(n) &= C^0(n+1) + S^1(n) = \\ C^0(n+1) + \frac{1}{\kappa} S^0(n) &= -\frac{i\pi(1-(-1)^n)}{\text{Sin}(\alpha)} \left(i \text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n, \\ \hat{S}^1(n) &= S^0(n+1) - C^1(n) = \\ S^0(n+1) - \frac{1}{\kappa} C^0(n) &= -\frac{\pi(1+(-1)^n)}{\text{Sin}(\alpha)} \left(i \text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^n.\end{aligned}\tag{110}$$

Hledané Fourierovy koeficienty jsou tedy rovné

$$\begin{aligned}\hat{Y}_n &= \frac{\text{Cos}(\alpha)}{2\pi} \left(\hat{C}^1(n) + i \hat{S}^1(n)\right) = \\ &= (-1)^n \text{Sign}(n) e^{i(n+1)\pi/2} \text{Tan}^{|n|}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{Cot}(\alpha).\end{aligned}\tag{111}$$

Nyní shrneme získané výsledky této kapitoly. Máme definovaný systém popsany v závislosti na úhlu pootočení

$$\begin{aligned}\omega(\varphi) &= \omega_0(1 + \kappa \text{Sin}(n_\omega \varphi)), \quad n_\omega \in \mathbb{N}, \quad \text{Sin}(\alpha) = \kappa, \\ y(\varphi) &= A_0 + a \text{Sin}(n_\omega \varphi + \varphi_0).\end{aligned}\tag{112}$$

Rozvoj funkce  $y$  ve Fourierovu řadu v závislosti na čase je

$$\begin{aligned}y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n e^{\frac{2\pi i n t}{n_\omega T}}, \quad T = \frac{2\pi}{n_\omega \omega_0 \text{Cos}(\alpha)}, \\ Y_0 &= A_0 - a \text{Cos}(\varphi_0) \text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \\ Y_{n n_\omega} &= a \text{Tan}^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{Cot}(\alpha) \\ &\quad \left(\text{Cos}(\varphi_0) e^{i n \frac{\pi}{2}} + (-1)^n \text{Sin}(\varphi_0) \text{Sign}(n) e^{i(n+1)\frac{\pi}{2}}\right), \\ Y_n &= 0 \text{ pro ostatní hodnoty } n.\end{aligned}\tag{113}$$

Je možné ukázat, že pro  $n \neq 0$  je

$$\left|\text{Cos}(\varphi_0) e^{i n \frac{\pi}{2}} + (-1)^n \text{Sin}(\varphi_0) \text{Sign}(n) e^{i(n+1)\frac{\pi}{2}}\right| = 1.\tag{114}$$

Fázový posuv ve sledované funkci tedy vůbec neovlivní amplitudy frekvenčních složek, způsobí pouze posuvy fázových složek. Exponenciální ubývání amplitud podle vztahu (106) bude stále splněno. Je možné odvodit podobné vztahy i pro komplikovanější případy. Podobné výsledky platí i pro

složitější případ úhlových rychlostí a sledovaných funkcí s více řádovými frekvencemi, jak bude stručně nastíněno v následující kapitole.

### ■ 8.3 Vztahy vyšších řádů

V následujícím oddíle představíme alespoň základní směr rozšíření elementárního případu uvedeného výše. Vyjdeme ze vztahu (91). Pokud je sledovaná funkce ve tvaru

$$y(\varphi) = A_0 + a \sin(p n_\omega \varphi), \quad (115)$$

kde  $p$  je přirozené číslo, mají Čebyševovy polynomy celočíselné indexy  $q = p n / n_\omega$  a mohou být vyjádřeny pomocí Fibonacciho polynomů (viz např. [22])

$$U_n(z) = (-i)^n F_{n+1}(2iz) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} (-1)^k 2^{n-2k} z^{n-2k},$$

$$y(x) = A_0 + a i \frac{\sin(x) - \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha) \sin(x)} \sum_{k=0}^{\lfloor (q-1)/2 \rfloor} \binom{q-k-1}{k} (-1)^k 2^{q-2k-1} \left( \frac{\cos(\alpha) \cos(x)}{1 - \sin(\alpha) \sin(x)} \right)^{q-2k-1} \quad (116)$$

Vzhledem k linearitě Fourierovy transformace můžeme provést Fourierovu transformaci každého členu řady ve vztahu (116) odděleně. Vypočteme tedy Fourierovy koeficienty  $Y_{m,n}$   $m$ -tého členu  $y_m(x)$  na intervalu s periodou  $2\pi n_\omega$

$$y_m(x) = \frac{\sin(x) - \kappa}{1 - \kappa \sin(x)} \left( \frac{\sqrt{1 - \kappa^2} \cos(x)}{1 - \kappa \sin(x)} \right)^{m-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_{m,n} e^{i n x / n_\omega}. \quad (117)$$

Jako v elementárním případě se bez újmy na obecnosti omezíme na případ  $n_\omega = 1$ . Definujeme dílčí integrály řádu  $k, l, m$ :

$$C_m^{k,l}(n) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^k(x) \cos^l(x)}{(1 - \kappa \sin(x))^m} \cos(nx) dx,$$

$$S_m^{k,l}(n) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^k(x) \cos^l(x)}{(1 - \kappa \sin(x))^m} \sin(nx) dx. \quad (118)$$

Fourierovy koeficienty  $Y_{m,n}$  mohou být vyjádřeny pomocí základních integrálů ve tvaru

$$\begin{aligned} C_m(n) &= \text{Cos}^{m-1}(\alpha) (C_m^{1,m-1}(n) - \text{Sin}(\alpha) C_m^{0,m-1}(n)), \\ S_m(n) &= \text{Cos}^{m-1}(\alpha) (S_m^{1,m-1}(n) - \text{Sin}(\alpha) S_m^{0,m-1}(n)), \\ Y_{m,n} &= \frac{C_m(n) + i S_m(n)}{2\pi}. \end{aligned} \quad (119)$$

Přímou integrací je možné vyjádřit základní integrály ve tvaru

$$\begin{aligned} C_m(n) &= 2 \text{Cos}^{m-1}(\alpha) \\ &\sum_{r=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^s \binom{n}{2s} \left( \binom{m}{2r} - \text{Sin}^2(\alpha) \binom{m}{2r+1} \right) \\ &\quad \text{Sin}^{2r}(\alpha) \frac{\Gamma(r+s+1) \Gamma((m+n)/2-s)}{\Gamma((m+n)/2+r+1)} {}_2F_1 \\ &\quad (m, r+s+1; (m+n)/2+r+1; \text{Sin}^2(\alpha)), \\ S_m(n) &= 2 \text{Cos}^{m-1}(\alpha) \sum_{r=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^s \binom{n}{2s+1} \\ &\quad \left( \binom{m}{2r} - \text{Sin}^2(\alpha) \binom{m}{2r+1} \right) \text{Sin}^{2r}(\alpha) \\ &\quad \frac{\Gamma(r+s+3/2) \Gamma((m+n)/2-s)}{\Gamma((m+n+1)/2+r+2)} {}_2F_1 \\ &\quad (m, r+s+3/2; (m+n)/2+r+2; \text{Sin}^2(\alpha)). \end{aligned} \quad (120)$$

Takový výsledek ovšem není příliš uspokojivý, neboť z něj není možné získat představu o skutečných souvislostech. Budeme proto pokračovat v odvozování v podobném duchu jako pro elementární případ. Je zřejmé, že pro  $m = 1$  přechází základní i dílčí integrály do podoby odpovídající elementárnímu případu, včetně rozšíření o fázový posuv ve vztazích (96) a (109). Podobně jako pro tyto výše uvedené případy můžeme ukázat, že

$$\begin{aligned} C_m^{k,2l}(2n+1) &= \\ C_m^{k,2l+1}(2n) &= S_m^{k,2l}(2n) = S_m^{k,2l+1}(2n+1) = 0. \end{aligned} \quad (121)$$

Podobným rozvojem jako ve vztahu (97) získáme identity



$$\begin{aligned}
C_m^{k,l}(n) &= \\
(C_m^{k-1,l}(n) - C_{m-1}^{k-1,l}(n)) / \kappa &= \frac{1}{\kappa^p} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} C_{m-j}^{k-p,l}(n), \\
S_m^{k,l}(n) &= (S_m^{k-1,l}(n) - S_{m-1}^{k-1,l}(n)) / \kappa = \\
\frac{1}{\kappa^p} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} S_{m-j}^{k-p,l}(n).
\end{aligned} \tag{122}$$

Indukcí bylo provedeno zobecnění pro ponížení indexu  $k \leq m$  o  $p \leq k$ . Narozdíl od elementárního případu ovšem dílčí intergály  $C_{m-1}^{k-1,l}(n)$  a  $S_{m-1}^{k-1,l}(n)$  nejsou nulové pro  $m > 1$ . Odvodíme dále sumační identity odpovídající vztahu (100) pro použití v indukčním kroku. V zobecněné notaci tyto identity mají tvar

$$\begin{aligned}
C_m^{k,l}(n+2) &= C_m^{k,l}(n) - 2 S_m^{k+1,l}(n+1) = \\
C_m^{k,l}(n) - \frac{2}{\kappa} (S_m^{k,l}(n+1) - S_{m-1}^{k,l}(n+1)), \\
S_m^{k,l}(n+2) &= S_m^{k,l}(n) + 2 C_m^{k+1,l}(n+1) = \\
S_m^{k,l}(n) + \frac{2}{\kappa} (C_m^{k,l}(n+1) - C_{m-1}^{k,l}(n+1)).
\end{aligned} \tag{123}$$

Kvůli přechodu od vyšších řádů  $m$  k nižším budeme potřebovat ještě jednu identitu nového typu, která je založena na per-partes integraci dílčích integrálů  $C_{m-1}^{0,m-s-1}(n)$  a  $S_{m-1}^{0,m-s-1}(n)$ . Integrován bude výraz  $\text{Cos}(nx)$ , resp.  $\text{Sin}(nx)$  a derivován bude zbytek výrazu. Po úpravě mají tyto identity tvar

$$\begin{aligned}
C_m^{0,m-s}(n) &= \frac{m-s-1}{(m-1)\kappa^2} (C_{m-1}^{0,m-s-2}(n) - C_{m-2}^{0,m-s-2}(n)) + \\
\frac{n}{(m-1)\kappa} S_{m-1}^{0,m-s-1}(n), \\
S_m^{0,m-s}(n) &= \frac{m-s-1}{(m-1)\kappa^2} (S_{m-1}^{0,m-s-2}(n) - S_{m-2}^{0,m-s-2}(n)) - \\
\frac{n}{(m-1)\kappa} C_{m-1}^{0,m-s-1}(n).
\end{aligned} \tag{124}$$

Pomocí matematické indukce a vztahů (102) a (123) lze ukázat, že dílčí integrály řádu 0, 0,  $m$  pro několik prvních hodnot indexu  $m$  mohou být vyjádřeny ve tvaru

$$\begin{aligned}
C_m^{0,0}(n) &= \frac{1 + (-1)^n}{2} B_m^{0,0}(n), \quad S_m^{0,0}(n) = -i \frac{1 - (-1)^n}{2} B_m^{0,0}(n), \\
B_1^{0,0}(n) &= i^n \frac{2\pi}{\cos(\alpha)} \tan^n\left(\frac{\alpha}{2}\right), \\
B_2^{0,0}(n) &= i^n \frac{2\pi}{\cos^3(\alpha)} \tan^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) (1 + n \cos(\alpha)), \\
B_3^{0,0}(n) &= i^n \frac{2\pi}{\cos^5(\alpha)} \tan^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
&\quad \frac{3 + 3n \cos(\alpha) + (n+1)(n-1) \cos^2(\alpha)}{2}.
\end{aligned} \tag{125}$$

V tomto vyjádření je patrné, že základní tvar výrazů pro sinové a cosinové dílčí intergrály je shodný, pouze nulové členy alternují odlišně. Dílčí intergrály mají ve skutečnosti opět reálnou hodnotu, imaginární jednotka je použita jen pro jednodušší zápis.

Pomocí rekurenčních identit (122) a (124) lze vyjádřit následující základní intergrály ve tvaru

$$\begin{aligned}
C_m(n) &= i^{m+n-1} \frac{1 - (-1)^{m+n}}{2} B_m(n), \\
S_m(n) &= i^{m+n-1} \frac{1 + (-1)^{m+n}}{2} B_m(n), \\
Y_{m,n} &= i^{3m+3n+1} B_m(n), \\
B_1(n) &= 2\pi \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \tan^n\left(\frac{\alpha}{2}\right), \\
B_2(n) &= 2\pi \frac{\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \tan^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) (1 - n \cos(\alpha)), \\
B_3(n) &= \\
&\quad 2\pi \frac{\cos(\alpha)}{\sin^3(\alpha)} \tan^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{1 - 3n \cos(\alpha) + (n^2 + 1) \cos^2(\alpha)}{2 \times 2!}, \\
B_4(n) &= 2\pi \frac{\cos(\alpha)}{\sin^4(\alpha)} \tan^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
&\quad \frac{1}{2 \times 3!} (-12n \cos(\alpha) + 3(2n^2 + (n-1)^2 + (n+1)^2 + 2) \\
&\quad \cos^2(\alpha) + 2n(n^2 + 5) \cos^3(\alpha)),
\end{aligned} \tag{126}$$

$$B_5(n) = 2\pi \frac{\cos(\alpha)}{\sin^5(\alpha)} \tan^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \frac{1}{4!} \left( -3 - 3n \cos(\alpha) + 3(7n^2 + 6) \cos^2(\alpha) - \right. \\ \left. n(10n^2 + 47) \cos^3(\alpha) + (n^4 + 14n^2 + 9) \cos^4(\alpha) \right),$$

Při rostoucí nerovnoměrnosti úhlové rychlosti  $\kappa \rightarrow 1$ , tedy  $\alpha \rightarrow \pi/2$  inklinují hodnoty  $\tan(\alpha/2) \rightarrow 1$ ,  $\cos(\alpha) \rightarrow 0$ ,  $\sin(\alpha) \rightarrow 1$ ,  $\cot(\alpha) \rightarrow 0$ . Stejně jako v elementárním případě se tedy s rostoucí nerovnoměrností úhlové rychlosti stává dominantním členem  $\tan^n(\alpha/2)$ . Nejvyšším členem zbývajícího výrazu je vždy člen  $c n^{m-1} \cot^m(\alpha)$ , kde  $c$  je konstanta. Podobně jako v předchozím případě můžeme tedy v okolí každé řádové harmonické složky v amplitudovém frekvenčním spektru vysledovat nekonečně mnoho vyšších harmonických složek, které v logaritmické stupnici klesají přibližně lineárně. Míra tohoto poklesu nepřímo úměrně závisí na míře nerovnoměrnosti otáčení referenční hřídele.

## 9. Závěr

Předložená práce se věnovala metodě měření úhlů, úhlových rychlostí a úhlových zrychlení a měření v závislosti na úhlu pootočení rotující hřídele pomocí inkrementální rotačních snímačů zvaných též enkodéry. Za účelem těchto měření bylo ve VÚTS, a.s. vyvinuto zařízení DMU, které se nyní již v páté generaci úspěšně využívá a v němž je uplatněno mnoho poznatků uváděných v této práci. Předkládaná práce se snaží doplnit bílá místa v teorii takovýchto měření.

Po zadefinování analyzované měřicí metody a jejímu vyčlenění vůči klasickým a běžně používaným metodám měření úhlových veličin ve druhé a třetí kapitole je významná část práce ve čtvrté kapitole věnována detailní analýze měřených veličin úhlu, úhlové rychlosti a úhlového zrychlení. Nejprve je diskutován vliv jednotlivých parametrů měření na měřené veličiny, následně je navržen postup optimálního nastavení těchto parametrů v závislosti na konkrétním experimentu.

Pro optimální měření úhlu pootočení je navrženo optimální nastavení měřicího rozsahu a interpolačního faktoru tak, aby naměřená data obsahovala minimum zaokrouhlovacích chyb. Pro měření úhlové rychlosti je diskutována především velikost úhlového intervalu, přes který se úhlová rychlost měří. Pro měření ustálených dějů je předložen návrh tohoto parametru v závislosti na měřeném rozsahu úhlové rychlosti. Pro měření např. rozběhů, doběhů či kývavých pohybů stroje je popsán algoritmus dynamické změny velikosti úhlového intervalu, přes který se úhlová rychlost měří, jsou diskutovány jeho parametry a praktické limity včetně návrhu na možné úpravy tohoto algoritmu. Pro měření úhlového zrychlení je také předložen návrh na nastavení velikosti úhlového intervalu, přes který se úhlové zrychlení měří, v závislosti na rozsahu měřené úhlové rychlosti.

Je předložen také algoritmus pro vysoce precisní měření diferenčních úhlů a úhlových odchylek od rovnoměrného otáčení integrací diferenční úhlové rychlosti včetně analýzy jeho vlastností.

Významnou částí je také shrnutí možných chyb měření s enkodéry. Je analyzován význam jednotlivých chyb měření a u významných je navržen postup na jejich redukci. Za zmínku stojí především analýza chyb vzniklých torzními

kmity enkodérů, neboť tyto chyby se projevují prakticky v každém měření a v některých případech mohou být i významné.

Druhá část práce se věnuje především rozboru spektrální informace úhlově vzorkovaných dat. Úvodní teoretická šestá kapitola shrnuje základní poznatky o Fourierově transformaci a v závěru ukazuje významný obecný vztah mezi spektrem dat vzorkovaných rovnoměrně v čase a rovnoměrně v úhlu pootočení referenční hřídele. Ukazuje, že spektrum vypočtené z naměřených dat v jedné doméně (např. časové) je konvolucí spektra z dat naměřených v druhé doméně (např. úhlové) a tzv. spektrálního okénka, tedy spektra funkce popisující vztah mezi oběma vzorkováními.

Dekonvoluce vlivu spektrálního okénka je obecně netriviální. Za určitých zjednodušujících předpokladů je v šesté kapitole představen algoritmus této dekonvoluce pro diskrétní naměřená data, tedy přepočtu úhlově vzorkovaných dat na časově vzorkovaná a přepočtu spekter úhlově vzorkovaných dat na spektra časově vzorkovaných dat (a naopak). Tento algoritmus se redukuje na řešení soustavy lineárních rovnic, s výhodou řešené pomocí pseudoinverze transformační matice. Takový výpočet je sice řádově náročnější, než výpočet klasických FFT, v reálné praxi s ohledem na reálnou dimenzi problému a na výkon moderních počítačů to však není vážný problém.

Poslední kapitola před závěrem se snaží analyticky popsat vliv spektrálního okénka na spektra v časové a úhlové doméně. Taková analýza je možná jen pro elementární případy, ukazuje se ovšem, že vypočtené závěry jsou přibližně platné i pro komplikovanější obecné případy. Především je možné konstatovat, že jedna harmonická komponenta v úhlové rychlosti referenční hřídele vyjádřené v závislosti na úhlu pootočení vybudí pro každou harmonickou komponentu sledované funkce (např. zrychlení výstupního členu mechanismu) vyjádřené v závislosti na úhlu pootočení nekonečně mnoho složek ve frekvenčním spektru, jejichž amplitudy v logaritmické stupnici ubývají přibližně (pro elementární případy dokonce přesně) lineárně se sklonem daným mírou nerovnoměrnosti úhlové rychlosti referenční hřídele.

# Rejstřík

analýza, řádová, 15

distribuce, periodická, 66  
DMU, 12, 18

enkodér, 12, 18

filtrace

souběhová, 16

Vold-Kalmanova, 16

FPGA, 18

frekvence, Nyquistova, 67

funkce

indikátorová, 63

omezená frekvenčně, 66

hřeben, Diracův, 66

hřidel, referenční, 11

integrál

dílčí, 83, 89

Fourierův, 60

základní, 83, 90

interpolace, 18

kritérium, Nyquistovo, 66

nosič, funkce, 63

okna, 63

okno, spektrální, 66

perioda, enkodéru, 18

počet pulsů, enkodéru, 18

puls, nulový, 18

rychlost, výpočet, 32

řád, 15, 61

signály A a B, 18

spektrum, 60

řádové, 61

frekvenční, 61

vlnových délek, 61

tacho-signal, 16

teorém

konvoluční, 63

vzorkovací, 67

transformace

formální diskrétní Fourierova, 70

Fourierova, 61

Fourierova diskrétní, 67

vzorkování

časové, 11

synchronní, 16

úhlové, 12

základna

časová, 11

úhlová, 12, 22

zrychlení, výpočet, 22

## Použitá literatura

- [1] Beutler, F.J.: *Sampling Theorems and Bases in a Hilbert Space*, in Information and Control, vol. 4, pp. 97-117, 1961
- [2] Blank, J., Exner, P., Havlíček, M.: *Lineární operátory v kvantové fyzice*, Karolinum, Praha, 1993
- [3] Brandt, A., Lagö, T., Ahlin, K., Tůma, J.: *Main Principles and Limitations of Current Order Tracking Methods*, in Sound&Vibration, vol. 39, number 3, pp. 19-22, 2005
- [4] Čejka, V.: *Relation of Time-based and Angle-based Spectra*, in Aplimat Proceedings, 2007
- [5] Čejka, V.: *Numerical transformation of Time-based and Angle-based Spectra*, in Aplimat Proceedings, 2007
- [6] Čejka, V., Šidlof, P., Václavík, M.: *Method for Evaluation of Behaviour of Mechanisms and Gears Using Angular-based Measurements*, Proceedings of 6. kolloquium Getriebetechnik, pp. 101-113, Aachen, 2005
- [7] Deeming, T.J.: *Fourier Analysis with Unequally-Spaced Data*, in Astrophysics and Space Science, vol. 36, pp. 137-158, 1975
- [8] Gaberson, H.A.: *A Comprehensive Windows Tutorial*, in Sound&Vibration, vol. 40, Number 3, pp. 14-23, 2006
- [9] Gade, S., Herlufsen, H., Konstantin-Hanse, H., Wismer, N.J.: *Order Tracking Analysis*, Brüel&Kjaer Technical Review, vol. 2, 1995
- [10] Gade, S., Herlufsen, H., Konstantin-Hanse, H., Vold, H.: *Characteristics of the Vold-Kalman Order Tracking Filter*, Brüel&Kjaer Technical Review, vol. 1, 1999
- [11] Kuhn, J.R.: *Recovering Spectral Information from Unevenly Sampled Data: Two Machine-Efficient Solutions*, The Astronomical Journal, Vol. 87, Number 1, pp. 196-202, 1982
- [12] Lomb, N.R.: *Least-squares Frequency Analysis of Unequally Spaced Data*, in Astrophysics and Space Science, vol. 39, pp. 447-462, 1975
- [13] Press, W. H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T.: *Spectral Analysis of Unevenly Sampled Data*, in Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, Reprinted 1999., ISBN 0-521-43108-5, 1992



- [14] Randall, R.B.: *Frequency Analysis*, Brüel&Kjaer, ISBN 87 87355 07 8, 1987
- [15] Scargle, J.D.: *Studies in Astronomical Time Series Analysis II: Statistical Aspects of Spectral Analysis of Unevenly Spaced Data*, in The Astrophysical Journal, vol. 263, pp 835-853, 1982
- [16] Swan, P.R.: *Discrete Fourier Transform of Non-Uniformly Spaced Data*, The Astronomical Journal, Vol. 87, Number 11, pp. 1608-1615, 1982
- [17] Šidlof, P., Svoboda, M.: *Dynamické vyšetřování mechanismů na základě digitálního měření okamžité úhlové rychlosti*, Strojírenství, vol. 34, pp. 267-273, 1984
- [18] Šidlof, P., Čejka, V., Škop, P.: *Method for Vibration and Noise Reduction of Loom Shed Mechanisms*, Proceedings International Conference on Vibrational Problems, Liberec, 2003
- [19] Tůma, J.: *Zpracování signálů získaných z mechanických systémů užitím FFT*, Sdělovací technika, ISBN 80-901936-1-7, 1997
- [20] Tůma, J.: *Principle and Software Tools for Machine-shaft Angular-Vibration Measurements*, in Colloquium Dynamics of Machines, Prague, 2005
- [21] Votrubec, V.: *Měření torzních kmitů hřídelů pomocí fázové demodulace signálu*, Diplomová práce, Technická univerzita v Liberci, Fakulta strojní, Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti, 2009
- [22] Weisstein, E.W.: *"Hypergeometric Function."* From MathWorld--A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/HypergeometricFunction.html>
- [23] Wolf, K.: *"Diagnostika součástí regulátorů tkacího stroje."*, Kandidátská disertační práce, Technická univerzita v Liberci, Fakulta textilní, 1985

## Přehled publikací

Čejka V.: *New Datatype for Discrete Signal Processing*, Prague Mathematica Conference 2008,

<http://www.wolfram.com/services/seminars/prague2008/schedule.html>,

<http://www.mathematica.cz/dokumenty-prezentace.php>

Čejka, V., Šidlof P.: *Signal Processing in Angular and Time Domain*, 9th

International Mathematica Symposium 2008, Maastricht 2008,

[http://bmiaserver.bmt.tue.nl/eProceedings/WWW/IMS\\_2008\\_e-Proceedings.html](http://bmiaserver.bmt.tue.nl/eProceedings/WWW/IMS_2008_e-Proceedings.html)

Čejka, V.: *Relation of Time-based and Angle-based Spectra*, 6th International

Conference APLIMAT 2007, Bratislava, 2007, ISBN: 978-80-969562-8-9

Čejka, V.: *Numerical Transformation of Time-based and Angle-based Spectra*,

6th International Conference APLIMAT 2007, Bratislava, 2007, ISBN:

978-80-969562-8-9

Čejka, V., Pustka, M.: *Vliv nerovnoměrnosti otáčení na spektrum signálu*, 4.

setkání uživatelů PULSE, Zátoňské Dvory, 2006, ISBN 80-239-7070-4

Čejka, V., Šidlof, P., Václavík, M.: *Method for Evaluation of Behavior of*

*Mechanisms and Gears Using Angular-based Measurements*, 6. kolloquium

Getriebetechnik, Aachen, 2005, str. 101-113, ISBN 3-86130-773-1

Šidlof, P., Svoboda, M., Čejka, V.: *Vývoj nové generace dvoukanálové soupravy*

*DMU 4 pro precizní dynamická měření úhlových rychlostí, úhlových*

*zrychlení a úhlů*, Konference Výzkumného centra Textil, Liberec, 2004

Šidlof, P., Čejka, V., Škop, P.: *Method for Vibration and Noise Reduction of*

*Loom Shed Mechanisms*, 6th International Conference on Vibration

Problems, Liberec, 2003